昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2011年4月1日発行　第49巻4号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

4
2011

特集 物理学と多様体
幾何学構造がもたらす物理学の理解



No.574
サイエンス社

／最／新／刊／

定価は税込

数理の玉手箱

藤井一幸（編集）・鈴木達夫・浅田 明・待田芳徳・岩井敏洋 著　Ａ５判

あまり知られていない非常に面白い話題を5つ。大学生だけでなく、意欲的な高校生も楽しめるよう易しく解説。定価2310円

●行列の指数法則?―ベーカー-キャンベル-ハウスドルフへの扉／非可換ワールドへの招待―準行列式の話／関数を1/2回微分する―分数冪微積の話／ツイスターから眺める微分方程式―パス(道), コーン(錐)を開く／宙返りの奥義―幾何, 力学, 制御

数理物理への誘い７

河東泰之 編　　Ａ５判　定価 2415 円

最新の動向を紹介する、シリーズ第７弾。今までより詳しく解説。

●目次 「量子古典対応」と「凝縮状態」（小嶋 泉）／ 数理物理学（繰り込み群）的視点からみたペレルマン理論（伊東恵一）／ リッチフローと4次元異種微分構造（石田政司）

【第６集】小嶋 泉 編　頂点作用素代数とモンスター、ランダム行列。各４本ずつ収録。　Ａ５判　定価 2835 円

【第5集】河東泰之 編　乱流の摂動理論、弱非線形解析、非可換幾何学など、７本収録。　Ａ５判　定価 2520 円

【第4集】荒木不二洋 編　繰り込み群、相転移、部分因子環、非可換幾何学など、７本収録。　Ａ５判　定価 2520 円

【第3集】江沢 洋 編　多体問題、共形場理論、非可換幾何、ゲージ量子力学など、７本収録。　Ａ５判　定価 2415 円

シリーズ<幾何学をみる>

③ 幾何学への新しい視点

――不確定性と非可換時空

大森英樹 著　　Ａ５変形判　定価 2205 円

「時間」を取り入れた数学の構築という問題を再び提起する。

●目次　矢は永久に進めない?／曲がってもまっすぐ?／光にとってのまっすぐとは?／カラテオドリーの熱機関社会学／時空が非可換?／個数概念は安泰か?／行動群という考え／…

② １次元代数的特異点とディンキン図形

卜部東介 著　　Ａ５変形判　定価 1890 円

●目次　基本事項／次元とは／代数多様体 $x^2+y^2=0$ を調べよう／ホモトピー／ピカール-レフシェッツの公式／代数多様体 $x^2+y^3=0$／x^2+y^3 のモノドロミー／A_k 型有理特異点／D_k 型有理特異点、E_6, E_7, E_8 型有理特異点／補足／問題のヒントと参考

①トポロジーへの誘い

――多様体と次元をめぐって

松本幸夫 著　　Ａ５変形判　定価 1785 円

多様体が次元によって劇的に変わる様子をやさしく説明する。また、ベクトル束と特性類、その後の発展、R^4 上のエキゾチックな微分構造、等々にも触れる。コラム：「数学者の横顔」

発行 遊星社　〒164-0001 東京都中野区中野 3-50-1　Tel. 03-3381-5914
http://www2.odn.ne.jp/yuseisha　振替 00140-5-137657

発売 星雲社　Tel. 03-3947-1021　Fax. 03-3947-1617

初歩からの数論

渡辺 豊著／A5判・定価1,680円

小中学校で学んだ事柄を大学生の眼で見つめ直した数論への入門書。ピタゴラスの定理、最大公約数、分数や小数といったお馴染みのテーマが専門的な数論の基本概念であることを実例を示しながら丁寧に解説する。

線形微分方程式序説

第2巻＝差分方程式による方法

申 正善・内藤敏機著／A5判・定価3,990円

第1巻の古典的内容とは異なり、第2巻は離散系、連続系、変換公式の融合体であり、根底でベルヌーイ数やスターリング数が関係する。特に、解の新しい表現を見出し、解の挙動を初期値によって特徴付ける等々、最新の結果を示す。

理工系数学の基礎・基本12

集合と位相空間の基礎・基本

小林貞一・逸見 豊著／A5判・定価1,785円

数学の基礎としての論理と集合から説き起こし、位相空間の基本的事項を初学者向けに解説した入門書。講義計画が立てやすいよう全体を30節に分け、1節を1回の講義で終えられる内容を収めた。各節末に適切な練習問題を配した。

理工系数学の基礎・基本11

グラフ理論の基礎・基本

織田 進・佐藤淳郎著／A5判・定価1,890円

グラフ理論の基礎的でよく知られた結果と考え方を平易にかつ理解しやすい内容に的を絞って解説した教科書。単純グラフを中心に、クラトウスキーの定理を最終目標とする。オイラーグラフやハミルトングラフについても詳細に取り扱う。

★価格は税込

発行＝牧野書店　114-0024東京都北区西ヶ原3-60-18　電話(03)3949-2344　http://www.makinoshoten.co.jp/

発売＝星雲社　112-0012東京都文京区大塚3-21-10　電話(03)3947-1021　FAX(03)3947-1617

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 574 April 2011

物理学と多様体

幾何学構造がもたらす物理学の理解

本号に掲載された広告主
遊星社／2
牧野書店／2
朝倉書店／7

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，半年間（本誌のみ）5,500 円．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7〜2008 年/5 省略
2008 年/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009 年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学
/3 方程式に潜む対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［幾何編］
別冊 代数学の魅力
/5 微積分を楽しむ
/6 現象と物理概念を結ぶ方程式
/7 現代物理の世界像
/8 複素数
/9 シュレーディンガー
/10 数学と物理に広がる不変量
別冊 量子重力理論
/11 可積分系の世界
/12《原理》の探求
2010 年/1 無限次元の魅力
/2 数学の可視化
/3 物理数学の効用
/4 現代数学はいかに使われているか［確率編］
別冊 現代幾何学の発展
/5 物理学事始め
/6 現代幾何と方程式
/7 物理学と行列
/8 力の統一にむけて
/9 南部陽一郎
/10 曲面の不思議
/11 連続から離散へ
/12 物理における《破れ》と調和
2011 年/1 数論の探求
/2 物理現象を読み解く数学的手法
/3 方程式と現代代数学

数理科学臨時別冊一覧

10 年/3 超関数・フーリエ変換入門
10 年/5 問題例で深める物理
10 年/6 非線形現象と微分方程式
10 年/7 数物系のための圏論
10 年/9 超弦理論を学ぶための場の量子論
10 年/10 重点解説 ジョルダン標準形
10 年/11 重点解説 ベクトル・テンソル
10 年/12 行列解析の基礎
11 年/1 超弦理論の基礎
11 年/3 繰りこみ群の物理と数理

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
MARUZEN & ジュンク堂渋谷店
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
丸善日本橋店
ブックファースト青葉台店（横浜）
有隣堂イセザキ町本店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
ジュンク堂書店（盛岡）
ジュンク堂書店（新潟）
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂京都 BAL 店
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
MARUZEN & ジュンク堂広島店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
ジュンク堂鹿児島店
紀伊國屋書店新潟店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
ジュンク堂書店（秋田）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

――大学生協・売店――

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店
熊本大学
名古屋大学
広島大学（北 1 店）
九州大学（理系）

April 2011 MATHEMATICAL SCIENCES Number 574

特集／物理学と多様体

はじめに

安井 幸則

1. 2010年2月ケンブリッジ大学 重力理論セミナー

会場にはギボンズ教授をはじめ，多くの重力理論・宇宙論の専門家が集まっている．最後に，ゆっくり，ゆっくりと車椅子でホーキング教授が登場し，これが合図となってセミナー開始．進行役の友人が私の名前と講演のタイトルを紹介する*1)：「高次元ブラックホールからコンパクトなアインシュタイン多様体」

ブラックホール時空から，ウイック回転と呼ばれる解析接続を使って，コンパクトなアインシュタイン多様体を作るという重力理論と幾何学のミックスした講演を行った．ここ10年くらいこだわり続けている研究テーマである．研究内容を最も理解して下さるギボンズ教授が最前列におり，安心できるのと同時に，すべてを見透かされているようで怖くもある．

*1） 正確には「Compact Einstein Manifold from Kerr-NUT-de Sitter Metric」ここで，後半のKerr-NUT … というのは高次元ブラックホール時空の名前である．ブラックホールの前に高次元と付けたのは弦理論に動機づけられて4次元以上の次元を持つ時空を考えているからである．

2. 物理学と多様体

物理学と多様体というテーマを編集者の方からいただいた．真っ先に頭に浮かんだのはケンブリッジ大学で行った講演である．関連するキーワードを集めて今回の特集を構成してみよう．こうすることで本特集の独自性が出せるかもしれない．また私自身にとっても面白い物になるに違いない．キーワードは，**ホロノミー**，**ファイバー束**，**ブラックホール**，**量子重力**，**弦理論**，**佐々木多様体**，**複素多様体**…もちろん，物理学と多様体というのはもっともっと広い領域をカバーする．物理学も多様体も多種多様である．選択した物理は重力・素粒子の話題にかなり偏っていることを予めお断りしておく．

以下順番に言葉の説明も兼ねて少し内容を紹介しよう．

ホロノミー　ベクトルを閉曲線に沿って平行移動しながら元の場所に戻ってくると，ベクトルの角度が一周する前の角度とずれることがある．空間が平坦であればこのようなことは起きないので，角度のずれは空間の曲がり具合を測定することになる．いろいろな閉曲線に対して角度のずれを測定することでホロノミー群と呼ばれる群が定義さ

れる．谷村氏の記事では，ホロノミー群を使って，猫の宙返りを幾何学的に理解できることが解説されている．身近な“物理現象”に潜む幾何学を谷村氏ならではの文章で表現して下さった．

ファイバー束　ゲージ理論の古典解にトポロジカルソリトンと呼ばれる安定な解が存在する．インスタントンやモノポールは代表的な例である．このようなソリトン解はファイバー束上の接続とみなすことができる．メビウスの帯の「捩れ」が解消できないように，ファイバー束の「捩れ」が，ソリトンの安定性を保証する．橋本氏は，数学者の視点からファイバー束がどのような空間であるかを解説して下さった．先に書いた猫の宙返りも数学的にはファイバー束上のホロノミー群として定式化されるものである．ファイバー束は物理学に幾何学的なイメージを与える基本的な言語になっている．

ブラックホール　一般相対論は幾何学が最も活躍する物理理論である．石橋氏の言葉を借りれば，多様体は一般相対論の記述のために発明されたと思いたくなるほどだ．まったく同感である．ところで多様体は誰が最初に言い出したのだろうか．数学辞典を見ると，その萌芽は既にラグランジュの力学系の中に見ることができると書いてある．その後，一般次元の多様体の概念は，微分幾何学的考察の結果としてリーマンによって導入された．ブラックホール時空は，一般相対論がその存在を予言する物理的にも幾何学的にも大変興味深い研究対象である．石橋氏はウルトラセブンを使ってブラックホールを特徴づけるホライズンに対し明快な解説をして下さった．ウルトラマンではなくウルトラセブンであることがポイントである．

量子重力　ミクロなスケールで時空はどのような姿をしているのであろうか？ ミクロなスケールでも時空を記述するのに多様体は有効な概念なのだろうか？ このような問にちゃんと答えるためには超弦理論による量子重力の記述が必要になると考えられている．しかしながら，超弦理論はまだ建設中であり量子重力を正確にコントロールすることは誰にもできない．河本氏は，時空の次元を2次元に簡単化することにより，離散化の手法を使ってアインシュタイン理論の量子論が定式化できることを解説して下さった．“量子時空”にフラクタル構造が現れるという多様体を超えた世界に我々を誘ってくれる．

弦理論　近年の超弦理論の発展はめざましく，その内容は物理学から数学まで多岐に渡るものである．森山氏は，弦理論とは何か，統一理論とは何を目指すものなのか，といった非常に手強い問いかけに対し初心者にもわかりやすい解説を書いて下さった．

弦の住む世界は10次元である．これは理論の無矛盾性から導かれる超弦理論の持つ大きな特徴である．他方，我々の住む世界は時間と空間を合わせても4次元であり，$10-4=6$ の6次元が何かを説明する必要がある．これが超弦理論のコンパクト化の問題であり，通常カラビ・ヤウ多様体と呼ばれる難しい幾何学が主役を演じる．森山氏は，この問題を攻略するために，カラビ・ヤウ多様体を簡単化したオービフォルドの方法がいかに有効であるかをわかりやすく解説して下さった．

佐々木多様体　佐々木重夫が佐々木多様体を導入したのは1960年代である．ごく最近まで，佐々木多様体に興味を持っていたのは微分幾何学を専門とする限られた数学者だけであった．ところが，超弦理論の予想であるゲージ・重力対応を検証するために佐々木多様体が用いられるようになり，それに対する関心は急激に高まった．そこで，物理学者の山崎氏と数学者の二木氏両名の方にそれぞれ異なる視点から佐々木多様体に関する解説をお願いした．今まで本誌の話題で取り上げられたことはなかったと思う．ぜひとも紹介したい内容である．

超対称性と複素多様体　超対称性は，ボソンとフェルミオンを入れ替える対称性であり，素粒子の統一模型を構築する上で重要な役割を果たすと考えられている．このような対称性を非線形シグマ模型で実現するには，模型のターゲット空間に強い制限が課せられる．この制限は，Bergerによって示されたホロノミー群に関する幾何学の分類定

理とも深く関連している．新田氏は，非線形シグマ模型の物理的な背景や，超対称性から要求される複素多様体について丁寧な解説をして下さった．

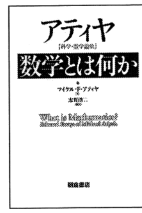
今回私が行った最大の仕事は，テーマに精通した素晴らしい執筆者を選ぶことができたことである．どの記事も，かなり専門的な内容であるにも関わらず，非常に読みやすく工夫されており，物理学と多様体の間の交流が生き生きと伝わってくるものになっている．これは執筆者の努力のたまものであり，ここで改めて感謝申し上げたい．それぞれの記事は独立して読めるようになっているので順番は気にせず好きなところから読み始めてほしい．

（やすい・ゆきのり，大阪市立大学大学院理学研究科）

朝倉書店

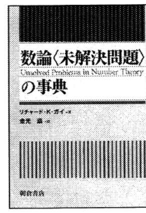
アティヤ［科学・数学論集］数学とは何か

志賀浩二編訳
A5判 200頁 定価2625円（本体2500円）（10247-5）
20世紀を代表する数学者マイケル・アティヤのエッセイ・講演録を独自に編訳した世界初の試み。数学と物理的実在／科学者の責任／数学とコンピュータ革命／数学の進歩の確認／20世紀後半の数学などを題材に，深く・やさしく読者に語りかける。



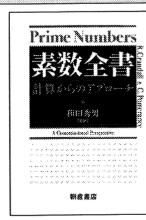
数論〈未解決問題〉の事典

金光　滋訳
A5判 440頁 定価8400円（本体8000円）（11129-3）
数論ににおける代表的な未解決問題を内容別に分類し，豊富な文献を付して解説。〔内容〕素数（メルセンヌ素数他）／整除性（親和数／オイラー数他）／加法的数論（ウーラム数他）／ディオファンタス方程式（カタラン予想他）／整数列／その他の問題



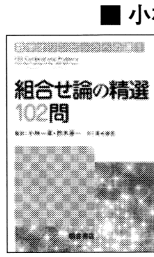
素数全書 ―計算からのアプローチ―

R.クランドール・C.ポメランス著　和田秀男監訳
A5判 640頁 定価14700円（本体14000円）（11128-6）
古典的アイディアと現代的な計算の視点の双方に立脚した，素数についての大著。〔内容〕素数の世界／数論的な道具／素数と合成数の判別／素数判定法／指数時間の素因子分解アルゴリズム／準指数時間素因子分解アルゴリズム／楕円曲線を使った方法／他



数学オリンピックへの道（全3巻）

■ 小林一章・鈴木晋一監訳
国際数学オリンピック・アメリカ代表チームの訓練や選抜で使われた問題から選り抜かれた精選問題集。難問奇問の寄せ集めではなく，これらを解いていくことでコツと技術を身につけることができる。

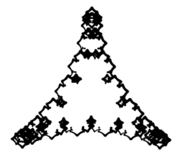


1. 組合せ論の精選102問
A５判　160頁　定価2940円
2. 三角法の精選103問
A５判　240頁　定価3570円
3. 数論の精選104問
A５判　232頁　定価3570円

〒162-8707 東京都新宿区新小川町6-29
電話 営業部（03）3260-7631　FAX（03）3260-0180
http://www.asakura.co.jp
（ISBN）は 978-4-254- を省略

ホロノミーと力学系

一輪車から猫の宙返り，量子コンピュータまで



谷村 省吾

1. 問題の原型：可積分条件

「微分方程式の可積分条件」は，一見地味なテーマだが，物理のいろいろな場面で現れ，しかもゲージ場という形で現れることが多い．この小論は，そういう話題を盛りだくさんに紹介する試みである．まず，この問題の一般的な形式を見ておこう．

変数 $(x^1, x^2, \cdots, x^n, y)$ を持つ力学系を考える．これらはすべて時間 t の関数とする．$x = (x^1, \cdots, x^n)$ の関数 $H_\mu(x)$ が与えられて

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} H_\mu(x) \frac{dx^\mu}{dt} \tag{1}$$

という方程式で $y(t)$ の変化の仕方が決められているとする．そうすると，y を x の関数 $y = F(x)$ で表せるか？という疑問が湧く．もしそのような関数 F があったとしたら，

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{dt} \tag{2}$$

となるので，(1), (2) が任意の $x(t)$ に対して成り立つためには

$$\frac{\partial F}{\partial x^\mu} = H_\mu(x) \tag{3}$$

が成り立つことが必要十分である．関数 $F(x)$ の偏微分は順序を交換しても同じ導関数を与えるので，

$$\frac{\partial H_\mu}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial F}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial F}{\partial x^\nu} = \frac{\partial H_\nu}{\partial x^\mu} \tag{4}$$

となる．つまり，方程式 (3) の解 $F(x)$ が存在するならば，任意の μ, ν について

$$\frac{\partial H_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial H_\nu}{\partial x^\mu} = 0 \tag{5}$$

が成立すべきである．逆に，(5) が成立すれば方程式 (3) の解が存在することが知られている（Poincaré の補題）．(5) を方程式 (3) の可積分条件という．同じことは微分形式を使うと簡潔に表現される[1)]：$\mathbb{R}^n$ と同相な領域では，

$$\exists F,\, dF = H \iff dH = 0. \tag{6}$$

また，条件 (1) を保ちながら x を閉曲線 C に沿って一周させたときに y に生じる変化は

$$\Delta y = \int_C \sum_{\mu=1}^{n} H_\mu(x)\, dx^\mu \tag{7}$$

である．$\Delta y \neq 0$ ならば $y = F(x)$ となるような関数は存在しない．Δy を閉曲線 C に伴う**ホロノミー**（holonomy）という．

2. 一輪車：拘束系の例として

古典力学系は，様々な状態を取り得る．物理量は状態に応じて実数値が決まる関数である．微積分ができない関数よりもできる関数のほうが圧倒的に分析が容易であるし，日常的に目にする物体の運動や物理量は滑らかな関数で近似できることが多い．そこで我々は，古典力学系の状態全体の集合は微分可能多様体をなし，物理量はこの多様体上の微分可能な関数であると考える．

力学系には**自由度**（degree of freedom）という概念がある．自由度とは，系の状態を一意的に指定するために必要十分な変数の個数であり，状態空間の次元である．例えば，床の上を運動する一輪車を考えよう[2)]（図 1）．一輪車には車輪の向きを変えるサドルと，車輪を回転させるペダルがついている．簡単のために，一輪車は倒れず，タイヤはスリップしないと仮定する．

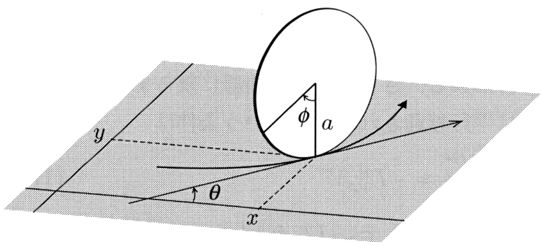


図１　一輪車（サドルとペダルは描かれていない）．

この一輪車の状態を指定するのにいくつの変数が必要だろうか？

答えは４である．車輪が床に接している点を指定するのに (x, y) という２つの座標を用いる．さらに，車輪の向き（＝サドルの角度）を指定する変数 θ と車輪の回転角（＝ペダルの角度）を指定する変数 ϕ を用いる．(x, y, θ, ϕ) という４つの変数の値がわかれば，一輪車の状態は一意的に特定できる．したがって一輪車の自由度は４である．

しかし，４つの変数すべてが独立かというとそうでもない．ペダルをこぐと，一輪車は移動する．つまりペダル角 ϕ に連動して接地点の位置 x, y が変わる．これらの変数の間には

$$dx = a\cos\theta\, d\phi, \tag{8}$$

$$dy = a\sin\theta\, d\phi \tag{9}$$

という関係が成り立つ．ここで a は車輪の半径である．a は定数なので，自由度とは言わない．(8), (9) は，ペダル角 ϕ が $d\phi$ の分だけ変動すれば，タイヤはスリップしないので，サドルの向き θ で決まる方向に (dx, dy) の分だけ車輪が移動するということを言っている．(8), (9) のように，変数の変動の仕方を制約する関係式を微分形の**拘束条件**（constraint）という．

さて，一輪車には４つの自由度と２つの拘束条件があるなら，真の自由度は $4-2=2$ つではないかという気がしてくる．つまり，拘束条件によってサドル角とペダル角から接地点の動きが決まるなら，$x = F(\theta, \phi)$, $y = G(\theta, \phi)$ のような関数があって，サドル角とペダル角から接地点の位置は決まってしまうのではないか？という疑問が湧く．

しかしそのような関数 F, G は存在しないことが背理法で証明される．もしも $x = F(\theta, \phi)$ という関数があったとしたら，

$$dx = \frac{\partial F}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial F}{\partial \phi}d\phi = H_\theta\, d\theta + H_\phi\, d\phi \tag{10}$$

が導かれ，(8) と見比べると $H_\theta = 0$, $H_\phi = a\cos\theta$ である．偏微分は順序を変えても同じ値になるので

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi}\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial F}{\partial \phi} \\ &= \frac{\partial H_\phi}{\partial \theta} = -a\sin\theta \end{aligned}$$

は等しいはずだが，左辺は恒等的に０，右辺は０ではないので，矛盾である．したがって，(8) を満たすような関数 $x = F(\theta, \phi)$ は存在し得ない．同様に (9) を満たす関数 $y = G(\theta, \phi)$ が存在しないこともわかる．

変数の微分を含んだ拘束条件 (8) を微分を含まない $x = F(\theta, \phi)$ という式に書き換えられるなら，**可積分**（integrable）であるという．いまのは**非可積分**（non-integrable）な拘束条件だったのである．

しかし，この結果はさほど意外なものではない．(θ, ϕ) を座標とする平面上で (θ_0, ϕ_0), $(\theta_0 + \Delta\theta, \phi_0)$, $(\theta_0 + \Delta\theta, \phi_0 + \Delta\phi)$, $(\theta_0, \phi_0 + \Delta\phi)$ を頂点とする長方形に沿って一周すると，一輪車は

$$\Delta x = a(\cos(\theta_0 + \Delta\theta) - \cos\theta_0)\,\Delta\phi, \tag{11}$$

$$\Delta y = a(\sin(\theta_0 + \Delta\theta) - \sin\theta_0)\,\Delta\phi \tag{12}$$

の分だけ変位する．これは自動車を縦列駐車させるときの操作（ハンドルを回してから前進し，ハンドルを戻してから後進する）と同じである．$\Delta x, \Delta y$ はホロノミーの一種である．ホロノミーがあるからこそ一輪車は移動可能なのである．サドル角とペダル角が決まれば接地点の位置が決まってしまうなら，一輪車は移動できず，乗り物としての用をなさなかったはずである．

■　3. 平行移動の幾何学　■

幾何学では図形の平行移動が重要であるが，平行移動も，ある種の拘束系を定める．直観的には，平行移動とは「なるべく向きを変えないように図形を移動させること」を意味する．曲がった空間上では，ベクトルを閉曲線に沿って平行移動させると，出発点に戻って来たベクトルは正味の回転を受けている．なるべく向きを変えないように運んだはずのベクトルが，いつの間にか向きを変えているのである（図２）．

平行移動という概念を定式化しよう．M を Euclid 空間 $\mathbb{R}^N$ の n 次元部分多様体とする．点 $x \in M$ における M の接ベクトル空間 T_xM は $\mathbb{R}^N$ に埋め込まれるが，T_xM 上への射影作用素を $P_x : \mathbb{R}^N \to T_xM$ と書く．M 上の曲線 $c : \mathbb{R} \to M$ と M 上のベクト

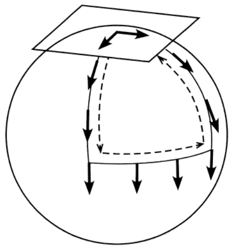


図 2　球面上でベクトルを閉曲線に沿って平行移動させる．

ル場 V が与えられたとき，c に沿う V の**共変微分**（covariant derivative）を

$$\nabla_{\dot{c}(t)}V := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big(P_{c(t)}V(c(t+\varepsilon))-V(c(t))\Big) \quad (13)$$

と定める．$\nabla_{\dot{c}(t)}V = 0$ のとき，c に沿って V は**平行移動**（parallel transport）されているという．

もう少し詳しく書くと，接空間 T_xM の基底を $\{e_1(x),\cdots,e_n(x)\}$ とし，双対基底を $\{f^1(x),\cdots, f^n(x)\}$ とする．$\langle f^\mu, e_\nu\rangle = \delta^\mu_\nu$ と，T_xM に直交する任意の $v\in\mathbb{R}^N$ に対して $\langle f^\mu, v\rangle = 0$ が成り立つ．接ベクトル場は $V(x) = V^\mu(x)e_\mu(x)$ と展開される（繰り返し添字は 1 から n まで和をとる）．点 $c(t+\varepsilon)$ を原点とするベクトル $V(c(t+\varepsilon))$ を原点 $c(t)$ に移して接空間 $T_{c(t)}M$ に射影したものは

$$\begin{aligned}&P_{c(t)}V(c(t+\varepsilon))\\ &= e_\mu(c(t))\,\langle f^\mu(c(t)), e_\nu(c(t+\varepsilon))\rangle\, V^\nu(c(t+\varepsilon))\end{aligned}$$

となる（図 3）．これを ε について微分したものが共変微分

$$\nabla_{\dot{c}(t)}V = e_\mu\left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\rho}+\mathit{\Gamma}^\mu_{\nu\rho}V^\nu\right)\frac{dx^\rho}{dt} \quad (14)$$

となる．ただし

$$\mathit{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} := \left\langle f^\mu(x), \frac{\partial}{\partial x^\rho}e_\nu(x)\right\rangle \quad (15)$$

で**接続係数**（connection coefficients）を定めた．そうすると曲線 $c(t) = (x^\rho(t))$ に沿ってベクトル場が平行移動されるべしという条件は

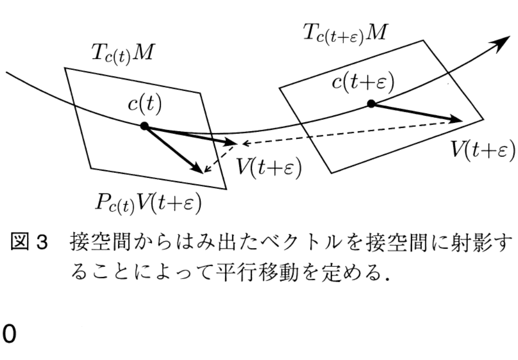


図 3　接空間からはみ出たベクトルを接空間に射影することによって平行移動を定める．

$$\left(\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\rho}+\mathit{\Gamma}^\mu_{\nu\rho}V^\nu\right)\frac{dx^\rho}{dt} = 0 \quad (16)$$

と書かれる．さらに一本の曲線に限らず，あらゆる方向に平行移動されるべしという条件は

$$\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\rho} = -\mathit{\Gamma}^\mu_{\nu\rho}V^\nu \quad (17)$$

あるいは $dV^\mu = -\mathit{\Gamma}^\mu_{\nu\rho}V^\nu dx^\rho$ と書かれる．これは (3) によく似た拘束条件である．これが可積分であるための必要十分条件は (4)，すなわち

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\rho} - \frac{\partial}{\partial x^\rho}\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda} = 0 \quad (18)$$

であり，左辺を計算すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\mathit{\Gamma}^\mu_{\nu\rho} - \frac{\partial}{\partial x^\rho}\mathit{\Gamma}^\mu_{\nu\lambda} + \mathit{\Gamma}^\mu_{\sigma\lambda}\mathit{\Gamma}^\sigma_{\nu\rho} - \mathit{\Gamma}^\mu_{\sigma\rho}\mathit{\Gamma}^\sigma_{\nu\lambda}\right)V^\nu \quad (19)$$

となる．括弧の中身は**曲率テンソル**（curvature tensor）と呼ばれる．曲率が 0 なら平行移動の方程式 (17) は可積分であり，ありとあらゆる場所にベクトルを平行移動して $V^\mu(x)$ を x の関数として定めることができる．曲率が 0 でなければ，平行移動の道筋によって平行移動の結果は異なる．

■　4. 猫の宙返り　■

猫の宙返りとは，猫の 4 本の脚を上に向けて宙づりにして，そっと手を離すと，猫は空中で体の向きを変えて，脚を床に向けて着地するという現象である．一方で，力学には角運動量保存則という規則があり，外部からトルクを受けていない物体の角運動量は変化しないはずである．猫が落下開始するとき猫に回転の初速度は与えなかったし，落下中の猫は他からトルクを受けていないので，猫は角運動量ゼロのまま，回転することなく，背中からどすんと着地するはずではないのか？ それとも猫は角運動量保存則を破っているのか？

この疑問は非常に歴史が古い．結論を言うと，猫は角運動量ゼロのまま体の向きを変えることができるのである．このことを分析しよう．

猫の体を質点系として扱う．質量 $m_1, m_2, \cdots, m_N$ といったパーツで猫の体はできているとする．質量 m_i の質点の位置を $\boldsymbol{r}_i\in\mathbb{R}^3$ とする．すべての質点間の相対的な距離を保って全質点を一斉に移動させる操作を**剛体的変換**（rigid transformation）という．猫の体全体を剛体的に回転させる操作は 3 次元回転行列 $g\in SO(3)$ の $\boldsymbol{r}_i\mapsto g\boldsymbol{r}_i$ という作用で記述される．もちろん猫の

運動は常に剛体的とは限らず，体のパーツの相対的位置関係が変わるような変形運動も行う．回転行列 $g(t)$ そのものが時間に依存していて $\boldsymbol{r}_i(t) = g(t)\boldsymbol{q}_i(t)$ と書かれる場合（$\boldsymbol{q}_i(t)$ は変形運動を記述する変数），時間微分を文字の上の点で表すと，質点の速度は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_i = \dot{\boldsymbol{r}}_i &= \dot{g}\boldsymbol{q}_i + g\dot{\boldsymbol{q}}_i \\ &= \dot{g}g^{-1}\cdot g\boldsymbol{q}_i + g\dot{\boldsymbol{q}}_i \\ &= \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}_i + g\dot{\boldsymbol{q}}_i. \end{aligned} \tag{20}$$

ここで $\dot{g}g^{-1}$ は反対称行列である．3 次元ベクトル $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ に対応して 3 次の反対称行列

$$R(\boldsymbol{\omega}) := \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \tag{21}$$

を定めると，反対称行列のベクトルへの作用は，ベクトル積

$$R(\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \tag{22}$$

に等しい．$\boldsymbol{\omega}$ は角速度ベクトルと呼ばれる．質点系の角運動量は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L} &:= \sum_i m_i\boldsymbol{r}_i\times\boldsymbol{v}_i \\ &= \sum_i m_i(g\boldsymbol{q}_i)\times(\dot{g}\boldsymbol{q}_i + g\dot{\boldsymbol{q}}_i) \\ &= g\sum_i m_i\boldsymbol{q}_i\times(g^{-1}\dot{g}\,\boldsymbol{q}_i) + g\sum_i m_i\boldsymbol{q}_i\times\dot{\boldsymbol{q}}_i \end{aligned} \tag{23}$$

で定義される．ここで $(g\boldsymbol{a})\times(g\boldsymbol{b}) = g(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ を使った．$g^{-1}\dot{g}$ も反対称行列であり，$g^{-1}\dot{g}\,\boldsymbol{q}_i = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{q}_i$ とおく．また，$q = (\boldsymbol{q}_1, \cdots, \boldsymbol{q}_n)$ と書いて

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = I(q)\boldsymbol{\Omega} := \sum_i m_i\boldsymbol{q}_i\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{q}_i) \tag{24}$$

で定まる $I(q)$ は $\boldsymbol{\Omega}\in\mathbb{R}^3$ に $\tilde{\boldsymbol{L}}\in\mathbb{R}^3$ を対応させる線形写像である．この $I(q)$ を**慣性テンソル**（inertia tensor）あるいは**慣性作用素**（inertia operator）という．実は $I:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ は対称作用素である．また，全質点が一直線上に並んでいると I の逆写像は存在しないが，それ以外の配置に対しては I の逆写像が存在する．

角運動量 $\boldsymbol{L}$ を 0 に保てという条件は

$$I(q)\boldsymbol{\Omega} + \sum_i m_i\boldsymbol{q}_i\times\dot{\boldsymbol{q}}_i = 0, \tag{25}$$

すなわち

物理学［新訂版］
阿部龍蔵・川村清・佐々田博之著
A5 判／320 頁／本体 1750 円

力学［新訂版］
阿部龍蔵著
A5 判／240 頁／本体 1600 円

連続体力学 流体および弾性体
松信八十男著
A5 判／240 頁／本体 2200 円

電磁気学入門
阿部龍蔵著
A5 判／256 頁／本体 1700 円

振動・波動入門
鹿児島誠一著
A5 判／256 頁／本体 2200 円

量子力学［新訂版］
岡崎　誠著
A5 判／240 頁／本体 1950 円

熱・統計力学入門
阿部龍蔵著
A5 判／176 頁／本体 1700 円

現代物理入門
阿部龍蔵著
A5 判／184 頁／本体 1850 円

ベクトル解析入門
阿部龍蔵著
A5 判／128 頁／本体 1200 円

Essential 物理学
阿部龍蔵著
A5 判／224 頁／本体 1700 円

新版 量子論の基礎
その本質のやさしい理解のために
清水　明著
A5 判／288 頁／本体 2000 円

［サイエンス社］

$$\boldsymbol{\Omega} = -I(q)^{-1} \sum_i m_i \boldsymbol{q}_i \times \dot{\boldsymbol{q}}_i \qquad (26)$$

であり，$R(\boldsymbol{\Omega}) = g^{-1}\dot{g}$ だったことを思い出すと

$$g^{-1}\, dg = -R \circ I(q)^{-1} \sum_i m_i \boldsymbol{q}_i \times d\boldsymbol{q}_i \qquad (27)$$

となる．これも (3), (8), (17) に類似の拘束条件方程式である．この式の右辺を

$$A(q) := -R \circ I(q)^{-1} \sum_i m_i \boldsymbol{q}_i \times d\boldsymbol{q}_i \qquad (28)$$

と書き，A を「猫のゲージ場」と呼ぶ．A は 3 次反対称行列に値を持つ 1 次微分形式である．猫が剛体的回転とは限らない一般的な運動をしているときに，見かけの角運動量を計算し，それを打ち消すような剛体運動の角速度 (26) を計算するのがゲージ場 A の役割である．角運動量を 0 に保てという拘束条件 (27) は

$$dg = gA \qquad (29)$$

と書かれる．問題はこの拘束が可積分か否かである．もし可積分なら g は関数 $g(q)$ で表され，外微分の規則から $ddg = 0$ を満たすはずである．ところが，

$$\begin{aligned} ddg &= dg \wedge A + g\, dA \\ &= gA \wedge A + g\, dA \\ &= g\,(dA + A \wedge A) \end{aligned} \qquad (30)$$

となり，曲率形式 $F := dA + A \wedge A$ が 0 でなければこの式は 0 になってくれない．猫の空間が曲がっていると，猫の回転を表す変数 g は非可積分であり，q の関数として表すことができず，猫が手足を振って元の姿勢に戻っても，つまり変数 q が変動して元の値に戻っても g は元の値に戻らず，ホロノミーを生じる．このホロノミーがすなわち猫の宙返りである．

Guichardet[3] は曲率 F を計算して，質点が 4 個以上あれば，ホロノミーによって任意の回転を作ることができることを証明している．岩井[4]はファイバー束の理論を用いてこの問題を定式化し，また，質点系から剛体系への拡張も行っている．

■ 5. Berry–Simon–Wilczek–Zee のホロノミー ■

ここまではもっぱら古典力学に関する話題だったが，類似の構造は量子力学でも見出され，Berry phase とか断熱位相とか幾何学的位相の名で知られている[5]．Berry[6]による発見（論文掲載は 1984 年）を数学的に基礎付けたのが Simon[7] (1983) である[*1]．また，Berry が可換群 $U(1)$ の場合について発見したことを非可換群に拡張したのが Wilczek と Zee[8] (1984) である．

幾何学的位相を理解する前提として，量子力学の断熱定理を知っておく必要がある．話を簡単にするため，n 次元の Hilbert 空間 $\mathbb{C}^n$ を状態空間とし，ハミルトニアン $H(x)$ に従う量子力学系を考える．$x = (x^1, \cdots, x^r)$ は量子系を制御するための変数であり，この量子系に外部から与えている電場や磁場や境界条件などを表している．実験者は意図的に制御変数 x を時間の関数 $x(t)$ として与えることができる．そうすると量子系の状態ベクトル $\psi(t) \in \mathbb{C}^n$ は Schrödinger 方程式

$$i\hbar\, \dot{\psi}(t) = H(x(t))\, \psi(t) \qquad (31)$$

に従って時間変化する．ハミルトニアンを

$$\begin{aligned} H(x) &= \sum_\alpha E_\alpha(x) P_\alpha(x) \\ &= \sum_\alpha \sum_{k=1}^{m_\alpha} E_\alpha(x) |\alpha, k; x\rangle\langle\alpha, k; x| \end{aligned} \qquad (32)$$

のようにスペクトル分解する．$|\alpha, k; x\rangle$ は $H(x)$ の固有値 $E_\alpha(x)$ に属する固有ベクトルである．$\alpha \neq \beta$ なら $E_\alpha(x) \neq E_\beta(x)$ とする．また，$k = 1, \cdots, m_\alpha$ は同じ固有値 $E_\alpha(x)$ に縮退している固有ベクトルを区別するためのラベルであり，$\langle\alpha, k; x|\beta, l; x\rangle = \delta_{\alpha\beta}\, \delta_{kl}$ とする．

断熱定理とは次のような主張である．制御変数 $x(t)$ を十分ゆっくり動かすとき，初期状態 $\psi(0)$ が $H(x(0))\psi(0) = E_\alpha(x(0))\psi(0)$ を満たすならば，任意の時刻 t $(0 \le t \le T)$ においても $H(x(t))\psi(t) = E_\alpha(x(t))\psi(t)$ が満たされる．つまり，$x(t)$ の変化に伴ってエネルギー固有値は連続的に変化していくが，初期状態が α 番目のエネルギー固有状態ならば，その後の状態も α 番目のエネルギー固有状態にとどまり続ける，というのが断熱定理の内容である．「十分ゆっくり」という条件（断熱条件）は $(E_\alpha - E_\beta)T/\hbar \gg 1$ と書かれ，エネルギー準位間隔が決める時間スケールに対して十分遅いという意味である．もしエネルギー準

*1） 論文投稿は Berry が先だが，論文が印刷されるのは Simon のほうが早かった．Simon は彼の論文の中で “found by Berry” と書いている．

位間隔が 0 になると（level crossing と呼ばれる），断熱条件は成り立たない．

この状況でどうやってホロノミーが現れるのだろうか？ 制御変数 $x(t)$ を経路 C に沿ってゆっくり動かして $x(T)=x(0)$ に戻したときに，状態ベクトルは元に戻るかどうか調べてみるとホロノミーが見出される．断熱定理によれば α は一定と見なしてよいので $|\alpha,k;x\rangle = e_k(x)\in\mathbb{C}^n$ と書く．$B(x):=(e_1(x),\cdots,e_m(x))$ と並べたものは n 行 m 列の行列であり $(n>m)$，

$$B^\dagger(x)B(x)=\mathbf{1}_m,\ B(x)B^\dagger(x)=P_\alpha(x) \quad (33)$$

を満たす．ここで $\mathbf{1}_m$ は m 次の単位行列．$H(x)\psi=E_\alpha(x)\psi$ を満たす ψ は $\phi=(\phi_1,\cdots,\phi_m)^T\in\mathbb{C}^m$ を使って

$$\psi=e_1(x)\phi_1+\cdots+e_m(x)\phi_m=B(x)\phi \quad (34)$$

と書ける．これを (31) に代入すると

$$i\hbar(\dot{B}\phi+B\dot{\phi})=E_\alpha(x(t))\,B\phi \quad (35)$$

となり，両辺に $B^\dagger$ を左からかけると

$$i\hbar(B^\dagger\dot{B}\phi+\dot{\phi})=E_\alpha(x(t))\,\phi \quad (36)$$

を得る．さらに，$\xi\in\mathbb{C}^m$ や m 次の行列 A_μ を

$$\phi(t)=\exp\Big[-\frac{i}{\hbar}\int_0^t E_\alpha(x(s))ds\Big]\xi(t),$$
$$B^\dagger\dot{B}=B^\dagger\frac{\partial B}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{dt}=A_\mu\frac{dx^\mu}{dt} \quad (37)$$

で導入すると，

$$\frac{d\xi}{dt}=-A_\mu\,\xi\,\frac{dx^\mu}{dt} \quad (38)$$

を得る．これは (1) と同じパターンの拘束条件である．$A(x):=A_\mu dx^\mu$ で m 次の反エルミート行列に値を持つ 1 次微分形式を定めると (38) は $d\xi=-A\xi$ と書けて (29) と類似の式になる．そうすると可積分条件は

$$dd\xi=-dA\,\xi+A\wedge d\xi=-(dA+A\wedge A)\xi \quad (39)$$

が 0 になることであり，曲率 $F:=dA+A\wedge A$ が可積分性の障害である．$F\neq 0$ だと $x(T)=x(0)$ でも $\xi(T)=\xi(0)$ にはならず，状態ベクトルは m 次ユニタリ行列の分だけ回転，すなわちホロノミーを受ける．

実はこのホロノミーを利用して量子コンピュータのユニタリゲートを作ろうというアイディアがある[9)]．コンピュータとして役に立つためには演算時間は短いほどよいが，断熱近似が成り立つためには，ゆっくり動かす必要がある．この要請を両立させるためには，制御変数はなるべく短い閉経路に沿って動かすのがよい．「一定のホロノミー（＝ユニタリゲート）を作り出す最短経路を見つけよ」という問題は**等ホロノミー問題**（isoholonomic problem）として定式化される．この問題は「猫の宙返りの最適化」という意味もあり，1991 年に数学者 Montgomery によって出題された[10)]．等ホロノミー問題に対する部分的な答えは Montgomery も見つけていたが，筆者らが等質空間の場合に完全な答えを見つけたのは 2004 年のことである[11)]．また，古池らは量子コンピュータの最適制御問題を力学の最速降下線の手法で解いている[12)]．

6. ゲージ理論の普遍性

滑らない一輪車や，平行移動するベクトルや，角運動量 0 の猫，断熱的に変化する量子状態などはいずれも拘束系の例であり，拘束条件によって自由度が減るかと思いきや，減らない例であった．いずれも非可積分な拘束系であり，ぐるっと一周して元に戻ったつもりが元に戻らない正味の回転のようなもの，すなわちホロノミーを生じる系であった．非可積分という否定的な言葉で捉えられるが，ホロノミーのおかげで一輪車は移動できるし，猫は宙返りできるのであり，非可積分性はポジティブな効用をもたらしている．また，いずれの例でも，何らかの空間上の平行移動を定めるゲージ場が登場し，平行移動の非可積分性が曲率という形で現れた．

ゲージ場は，もともと Einstein の一般相対性理論を拡張しようとした Weyl の試みから生まれ，現在では素粒子の強い力・弱い力・電磁力を記述する標準理論の基本要素になっている．つまりゲージ場はミクロの世界の物理の主役である．

そのようなゲージ場が，一見，素粒子とも量子論とも関係のないマクロの世界の一輪車や猫の力学に顔を出すのは不思議なことである．もちろんゲージ理論がなければ猫の運動が記述できなかったわけではない．通常の Newton 力学の範疇で十分記述可能である．しかしいったんゲージ場という構造に気がつくと，そこにもここにもゲージ場が潜んでおり，目に見える効果をもたらしていることに気づく．ゲージ場という構造そのものが非常に自然であり，ミクロ・マクロのスケールの違いを超えて，あまねく潜在しているものなのだろう．

謝辞：猫の宙返りは岩井敏洋教授（京都大学）の十八番と言ってもよい研究テーマであり，私は大学院生の頃から岩井教授の論文に影響を受けて[13]今日に至るまで力学におけるゲージ構造の研究を続けています．力学と幾何学の面白さを教えて下さり，いつもおおらかに笑って励まして下さる岩井教授に感謝します．

参考文献

1) 微分幾何学の基本的なことについては，谷村省吾『理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何』臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ 52, サイエンス社 (2006).
2) 佐藤文隆「車庫入れのゲージ理論」臨時別冊・数理科学「ゲージ理論の発展」120–124, サイエンス社 (2009).
3) A. Guichardet, "On rotation and vibration motions of molecules", *Ann. Inst. H. Poincaré* **40**, 329 (1984).
4) T. Iwai, "A geometric setting for classical molecular dynamics", *Ann. Inst. H. Poincaré* **47**, 199 (1987); 岩井敏洋「ネコの宙返りと分子の力学」数理科学 1988 年 9 月号，38–42; T. Iwai, "Classical and quantum mechanics of jointed rigid bodies with vanishing total angular momentum", *J. Math. Phys.* **40**, 2381 (1999).
5) つい最近，幾何的位相の新しい測定方法が実証された．H. Kobayashi, S. Tamate, T. Nakanishi, K. Sugiyama, and M. Kitano, "Direct observation of geometric phases using a three-pinhole interferometer", *Phys. Rev. A* **81**, 012104 (2010).
6) M.V. Berry, "Quantal phase factors accompanying adiabatic changes", *Proc. R. Soc. Lond. A* **392**, 45 (1984).
7) B. Simon, "Holonomy, the quantum adiabatic theorem, and Berry's phase", *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2167 (1983).
8) F. Wilczek and A. Zee, "Appearance of gauge structure in simple dynamical systems", *Phys. Rev. Lett.* **52**, 2111 (1984).
9) P. Zanardi and M. Rasetti, "Holonomic quantum computation", *Phys. Lett. A* **264**, 94 (1999).
10) R. Montgomery, "Isoholonomic problems and some applications", *Commun. Math. Phys.* **128**, 565 (1991).
11) S. Tanimura, M. Nakahara, and D. Hayashi, "Exact solutions of the isoholonomic problem and the optimal control problem in holonomic quantum computation", *J. Math. Phys.* **46**, 022101 (2005); e-print arXiv quant-ph/0406038.
12) 古池達彦，奥平陽介，細谷暁夫「量子最速曲線」日本物理学会誌 **62**(7), 513 (2007).
13) 今回の話題の半分くらいは私の修士論文に書いたことである．谷村省吾「トムとベリー」素粒子論研究 85 巻 1 号，1（1992 年 4 月）．インターネット上のデータベース CiNii からダウンロードできる．

（たにむら・しょうご，名古屋大学大学院情報科学研究科）

好評発売中!!

SGC ライブラリ–52
理工系のための
トポロジー・圏論・微分幾何
双対性の視点から

谷村省吾著／B5 判・216 頁・本体 1886 円

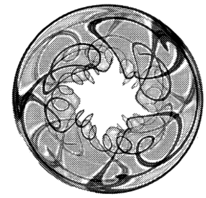
トポロジーや圏論や微分幾何学は，素人には近寄りがたい「高級な数学」では決してなく，この世界に生起する出来事を語るためのきわめて自然な言語であり，自分の言葉として活用できるようにしておくと，いろいろなことが明解に，かつ生き生きと見えてくるようなものである．本書は，そのことをわかり易く伝える，理工系一般の学部上級生，大学院生向けの平易な入門書である．

主要目次　外延と内包の双対性　位相空間　ホモトピー　ホモロジー　圏論　微分幾何学　物理への応用

表示価格は税抜きです

［サイエンス社］

ベクトル束とファイバー束



橋本　義武

1. シュレーディンガー方程式

現代数学の基礎には線型代数的概念がある．それは例えば，解析学においては**位相ベクトル空間**であり，代数学においては**表現**であり，そして幾何学においては**ベクトル束**であって，そのいずれにも量子力学が深く関わっている．初めに，ベクトル束がシュレーディンガー方程式からどのように姿を現すか見てみよう．

数々の実験の示すところ，電子は電磁場と相互作用し，かつ波の性質をもつ．そのようなものの運動方程式をどのように書いたらよいだろうか．

電磁場のないところを直進する 1 個の電子の波動関数を $\psi(\boldsymbol{x}, t) = \mathrm{e}^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$ とする．$\boldsymbol{x}$ は位置，t は時刻，$\boldsymbol{k}$ は波数ベクトル，$\omega > 0$ は角振動数である．ドブロイは，この波が運動量 $\boldsymbol{p} = \hbar\boldsymbol{k}$ とエネルギー $E = \hbar\omega$ をもつという見立てをおこなった．$\hbar$ は（プランク定数）$/(2\pi)$ である．これらは

$$i\hbar\partial_t\psi = E\psi, \quad -i\hbar\nabla\psi = \boldsymbol{p}\psi$$

のように，微分作用素の固有値として現れる．電子の質量を m とすると，遅い電子の場合，$E = \dfrac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2$ なので，上の波動関数は微分方程式

$$i\hbar\partial_t\psi = \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla)^2\psi \qquad (1)$$

をみたす．これを自由場のシュレーディンガー方程式という．

(1) の解 ψ に対し，

$$\partial_t|\psi|^2 = \frac{i\hbar}{2m}\nabla\cdot(-(\nabla\overline{\psi})\psi + \overline{\psi}\nabla\psi)$$

が成り立つ．これは $|\psi|^2$ が保存量の密度であることを意味する．そこで $|\psi|^2$ を電子が存在する確率の密度と解釈する．その積分により，波動関数の空間は**位相ベクトル空間**になる．

一方，$|\psi|^2$ を保つ変換 $\psi \to \mathrm{e}^{i\theta(\boldsymbol{x},t)}\psi$ に対して (1) は不変ではないが，ポテンシャル項 $V_0(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{V} = (V_j(\boldsymbol{x}, t))_{j=1,2,3}$ を入れたシュレーディンガー方程式

$$(i\hbar\partial_t - V_0)\psi = \frac{1}{2m}(-i\hbar\nabla - \boldsymbol{V})^2\psi \qquad (2)$$

を考えると，こちらは変換

$$\psi \to \mathrm{e}^{i\theta}\psi, \quad V_0 \to V_0 - \hbar\partial_t\theta, \quad \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V} + \hbar\nabla\theta$$

で不変になる．この変換を**ゲージ変換**という．(2) の解 ψ に対し，

$$\partial_t|\psi|^2 = \frac{1}{2m}\nabla\cdot(i\hbar(-(\nabla\overline{\psi})\psi + \overline{\psi}\nabla\psi) + 2\boldsymbol{V}|\psi|^2)$$

が成り立ち，やはり $|\psi|^2$ を確率密度と解釈できる．

ポテンシャルを電磁場と解釈すれば，(2) は電磁場と相互作用する波の運動方程式である．ゲージ変換は電磁場のほうの運動方程式であるマクスウェル方程式をも不変にする．

電子と電磁場との相互作用にはスピンという自由度の寄与もあるので，それを考慮に入れるために，電子の波動関数 ψ を $\mathbb{C}^2$ に値をとるものとし，磁場 $\nabla\times\boldsymbol{V}$ をリー環 $\mathrm{su}(2) = \mathbb{R}^3$ に値をと

るものと見て ψ に作用させた項を，シュレーディンガー方程式に加える．こうして得られた方程式（パウリ方程式）もゲージ変換で不変である．

波動関数の偏角をとりかえても理論が不変に保たれる，ということから，波動関数 ψ の各点での値 $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ は**点ごとに別のベクトル空間に属している**と見なすのが自然ではないかという話になる．この見方を定式化すると，**ベクトル束**とその切断の概念にいきつく．

一方，電磁場のポテンシャルは $\mathbb{R}^4 \times S^1 = \{(\boldsymbol{x}, t, \mathrm{e}^{i\theta})\}$ 上の微分形式 $\hbar^{-1}(\boldsymbol{V}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x} - V_0\mathrm{d}t) + \mathrm{d}\theta$ と解釈される．多様体 $\mathbb{R}^4 \times S^1$ は S^1 をファイバーとする $\mathbb{R}^4$ 上の**ファイバー束**というものであり，この微分形式はファイバー束の局所的なねじれを表す**接続**という量である．すなわち，力とはファイバー束のねじれだったのである．

以下，ベクトル束・ファイバー束の定義を与え，その大域的なねじれについて考察する．

2. ベクトル束

2.1 ベクトル束の定義

K を実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ とする．位相空間［または多様体］B 上を動く r 次元 K ベクトル空間の族 $\{E_p\}_{p\in B}$ であって，「E_p が連続的に［なめらかに］動く」ものを考えたい．

$E = \bigsqcup_{p\in B} E_p$ は位相空間［多様体］，ベクトル空間 E_p は E の部分空間［部分多様体］でもあり，$E_p = \pi^{-1}(p)$ によって定義される写像 $\pi : E \to B$ が連続［C^∞］であるとする．さらに，B の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ および K ベクトル空間の同型の族 $\{\varphi_{\alpha,p} : E_p \to K^r\}_{\alpha\in\Lambda,\, p\in U_\alpha}$ が存在して，各 $\alpha \in \Lambda$ に対し写像

$$\varphi_\alpha : \bigsqcup_{p\in U_\alpha} E_p \to U_\alpha \times K^r,$$

$$\varphi_\alpha(u) = (p, \varphi_{\alpha,p}(u)) \quad (u \in E_p)$$

が同相［微分同相］であるとする．

このとき，(E, π) を階数 r の B 上の K **ベクトル束**という．$K = \mathbb{R}$ のとき実ベクトル束，$K = \mathbb{C}$ のとき複素ベクトル束という．多様体の接ベクトル束は実ベクトル束の例である．階数 1 のベクトル束を直線束という．$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ を局所自明化，B を底空間，E を全空間，連続写像 $\pi : E \to B$ を射影といい，ベクトル空間 $E_p = \pi^{-1}(p)$ を $p \in B$ 上の**ファイバー**という．

同様にして，位相空間［多様体］B 上を動く，互いに同相な位相空間［微分同相な多様体］の族 $\{E_p\}_{p\in B}$ で，「E_p が連続的に［なめらかに］動く」ものを，局所自明化をもつものとして定義することができる．それが**ファイバー束** $\pi : E \to B$ である．付随する諸概念もベクトル束の場合に準じて定義される．

2.2 自明なベクトル束

B の開被覆 $\{B\}$ による局所自明化をもつベクトル束を，自明なベクトル束という．

射影 $\pi : B \times K^r \to X$, $\pi(p, u) = p$ の定めるベクトル束を積ベクトル束という．積ベクトル束は自明である．

2.3 切断

K ベクトル束 $\pi : E \to B$ に対し，連続［C^∞］写像 $s : B \to E$ で，B の各点 p に $s(p) \in E_p$ を対応させるものを，E の**切断**という．任意の $p \in B$ に対して $s(p) = 0$ である切断を零切断という．E の切断全体 $\Gamma(B, E)$ は自然な K ベクトル空間の構造をもつ．

積ベクトル束 $B \times K^r \to B$ の切断は，B から K^r への連続［C^∞］写像と自然に 1 対 1 に対応する．

階数 r の K ベクトル束 $\pi : E \to B$ が自明であることは，切断 $s_1, \ldots, s_r \in \Gamma(B, E)$ で，B の各点 p において $s_1(p), \ldots, s_r(p)$ がファイバー E_p の基底であるようなものが存在することに同値である．

2.4 変換関数

階数 r のベクトル束 $\pi : E \to B$ の局所自明化 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ に対し，写像

$$g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathrm{GL}_r(K), \quad p \mapsto \varphi_{\alpha,p} \circ \varphi_{\beta,p}{}^{-1}$$

を変換関数という．これは $U_{\alpha\beta\gamma}$ 上でコサイクル

条件 $g_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}$ をみたす．ここで，$U_{\alpha_1\cdots\alpha_n} = \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i}$ と略記した．

逆に，コサイクル条件をみたす変換関数からベクトル束が構成される．

2.5 実ベクトル束の向き・計量

階数 r の実ベクトル束 E に対し，すべての変換関数が $\mathrm{SL}_r(\mathbb{R})$ に値をとるような局所自明化を E の向きという．向きが存在するとき，E は向きづけ可能であるという．

また，階数 r の実ベクトル束 [複素ベクトル束] $E \to B$ の各ファイバー E_p 上に正定値の内積 [エルミート内積] h_p が入っていて，p について連続的に [なめらかに] 動くとき，すなわち任意の切断 s_1, s_2 に対して $h_p(s_1(p), s_2(p))$ が B 上の連続 [C^∞] 関数を与えるとき，内積の族 $\{h_p\}_{p\in B}$ を E 上の計量 [エルミート計量] という．局所自明化が E の計量を $\mathbb{R}^r$ の標準内積 [$\mathbb{C}^r$ の標準エルミート内積] にうつすとき，変換関数は直交群 $\mathrm{O}(r)$ [ユニタリ群 $\mathrm{U}(r)$] に値をとる．

2.6 群の作用

群 G の集合 X への作用とは，写像

$$\alpha: G\times X \to X, \quad (g, x) \mapsto gx$$

であって，$(gg')x = g(g'x)$, $ex = x$ をみたすもののことである．X の部分集合 $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ を x を通る軌道といい，軌道全体の集合 X/G を商集合という．軌道がただ 1 つであるとき，作用は推移的であるという．任意の $x \in X$ に対し，写像 $G \to Gx$, $g \mapsto gx$ が単射であるとき，作用は自由であるという．

2.7 主束

ベクトル空間のベクトルの列であって基底をなしているものを枠と呼ぶ．n 次元ベクトル空間 V の枠全体の集合を $\mathrm{Fr}(V)$ と書くことにする．一般線型群 $\mathrm{GL}(V)$ の $\mathrm{Fr}(V)$ への自然な作用は自由かつ推移的である．また，内積つき実ベクトル空間 [エルミート内積つき複素ベクトル空間] V に対し，正規直交枠全体の集合を $\mathrm{OFr}(V)$ [$\mathrm{UFr}(V)$] とすると，直交群 $\mathrm{O}(V)$ [ユニタリ群 $\mathrm{U}(V)$] の $\mathrm{OFr}(V)$ [$\mathrm{UFr}(V)$] への自然な作用は自由かつ推移的である．

位相群 [リー群] G がファイバー束 $P \to B$ の全空間 P に作用していて，それが各ファイバーへの自由かつ推移的な作用になっているとき，P を G 主束という．

階数 r の K ベクトル束 $E \to B$ に対し，$\mathrm{Fr}(E) = \bigsqcup_{p\in B} \mathrm{Fr}(E_p)$ に B 上の $\mathrm{GL}_r(K)$ 主束の構造が自然に入る．これを E の枠束という．また，階数 r の計量つき実ベクトル束 [エルミート計量つき複素ベクトル束] E の正規直交枠束 $\mathrm{OFr}(E)$ [$\mathrm{UFr}(E)$] も同様に定義され，$\mathrm{O}(r)$ [$\mathrm{U}(r)$] 主束になる．

3. ベクトル束の例

3.1 メビウスの帯

自明でないベクトル束の最も簡単な例は，メビウスの帯である．E を $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ において (x, u) と $(x+1, -u)$ を同一視したものとし，$\pi: E \to S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を第 1 成分への射影とする．E は S^1 上の実直線束であり，幅が無限に長いメビウスの帯の形をしている．

E の切断 s が零切断と横断的に交わるとすると，s の零点は奇数個である．S^1 上の自明な実直線束の場合，零切断と横断的に交わる切断の零点は偶数個である．よって，E は自明ではない．また，E は向きづけ不可能である．

3.2 トートロジカル束

$V = K^{n+k}$ の n 次元部分ベクトル空間全体の集合 $\mathrm{Gr}_{n,\,n+k}(K)$ を，グラスマン多様体という．これは $K = \mathbb{R}$ のとき nk 次元多様体になり，$K = \mathbb{C}$ のとき $2nk$ 次元多様体，nk 次元複素多様体になる．特に $\mathbb{P}^k(K) := \mathrm{Gr}_{1,\,k+1}(K)$ を射影空間という．

グラスマン多様体 $\mathrm{Gr}_{n,\,n+k}(K)$ の点 p に対応する V の n 次元部分ベクトル空間を E_p と書くことにする．積ベクトル束 $\mathrm{Gr}_{n,\,n+k}(K)\times V$ の部分ベクトル束 $E = \bigsqcup_p E_p$ をトートロジカル束と呼ぶ．メビウスの帯は $S^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ 上のトートロジカル束にほかならない．

$I \subset \{1, 2, \ldots, n+k\}$, $|I| = k$ に対し，I に属する番号の成分への射影 $\mathrm{pr}_I : K^{n+k} \to K^n$ が E_p 上全射であるような $p \in \mathrm{Gr}_{n,\,n+k}(K)$ 全体の集合を U_I とすると，

$$\varphi_I : E|U_I \to U_I \times K^n,$$
$$\varphi_I(u) = (p, \mathrm{pr}_I(u)) \quad (p \in U_I,\ u \in E_p)$$

は局所自明化である．

3.3 普遍束

自然な包含写像 $K^j = K^j \times \{0\} \subset K^{j+1}$ の与える列 $K^n \subset K^{n+1} \subset K^{n+2} \subset \cdots$ によって，$\mathrm{Gr}_{n,\,\infty}(K) = \bigcup_n \mathrm{Gr}_{n,\,n+k}(K)$，およびその上のトートロジカル束が定義される．これを普遍束という．$\mathbb{P}^\infty(K) = \mathrm{Gr}_{1,\,\infty}(K)$ と書く．

$\mathbb{C}^{n+k}$ $(k \geq 0)$ に標準エルミート内積を入れると，普遍束にエルミート計量が入る．その正規直交枠束の全空間 $V_{n,\,\infty}(\mathbb{C})$ は可縮であって，$\mathrm{U}(n)$ が自由に作用する．$\mathrm{U}(n)$ の閉部分群 G に対し，G 主束 $EG = V_{n,\,\infty}(\mathbb{C}) \to BG = EG/G$ を普遍 G 主束といい，BG を G の分類空間という．G が作用する空間 M に対し，商 $M_G = (EG \times M)/G$ を作ることをボレル構成という．射影 $M_G \to BG$ はファイバーが M と同相なファイバー束である．

4. コホモロジー

4.1 ドラーム・コホモロジー

メビウスの帯が自明でないことを知るために，切断の零点の個数を数えた．これに相当する作業を，向きづけられた実ベクトル束に対しておこないたい．

現代数学では，**ものの個数を数える代わりに，ベクトル空間を定義してその次元を求める．**このとき個数の比較をおこなう方法がホモロジー代数である．それは「図形の穴を数えよ」という禅の公案のようなことを考えていたポアンカレが，豁然大悟した境地であった．

n 次元多様体 M に対し，M 上の q 次微分形式全体のなす実ベクトル空間を $\Omega^q = \Omega^q(M)$ と書く．その上には外積と外微分作用素

$$\wedge : \Omega^p \otimes \Omega^q \to \Omega^{p+q}, \quad \mathrm{d} = \mathrm{d}^q : \Omega^q \to \Omega^{q+1}$$

が定義されていて，次数つき可換な微分代数になる，すなわち外積の結合則・次数つき可換則，次数つきライプニッツ則，$\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ をみたす．実ベクトル空間

$$\mathrm{H}^q(M) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{d}^q / \mathrm{Im}\,\mathrm{d}^{q-1}$$

を M のドラーム・コホモロジーという．これは以下の性質をもつ．

- C^∞ 写像 $f : M_1 \to M_2$ は線型写像 $f^* : \mathrm{H}^q(M_2) \to \mathrm{H}^q(M_1)$ を誘導する．さらに，H^q は多様体の圏から実ベクトル空間の圏への反変関手を与える．
- 外積によって，$\mathrm{H}^*(M) = \bigoplus_{q=0}^n \mathrm{H}^q(M)$ は次数つき可換な $\mathbb{R}$ 代数になる．
- $\mathrm{H}^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $\mathrm{H}^q(\mathbb{R}) = 0$ $(q \neq 0)$.
- $\mathrm{H}^*(M \times N) = \mathrm{H}^*(M) \otimes \mathrm{H}^*(N)$.
- $f, g : M_1 \to M_2$ がホモトピックならば，$f^* = g^*$．したがって，互いにホモトピー同値な多様体どうしはドラーム・コホモロジーが同型．
- n 次元球面 S^n に対し，$\mathrm{H}^q(S^n) = \mathbb{R}$ $(q = 0, n)$, $\mathrm{H}^q(S^n) = 0$ $(q \neq 0, n)$.

4.2 チェック・ドラーム複体

M の開被覆 $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対し，

$$C^{p,\,q} = \bigoplus_{\alpha_0,\,\ldots,\,\alpha_p} \Omega^q(U_{\alpha_0 \cdots \alpha_p})$$

とおく．$\delta : C^{p,\,q} \to C^{p+1,\,q}$ を

$$(\delta\omega)_{\alpha_0 \cdots \alpha_{p+1}} = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \omega_{\alpha_0 \cdots \hat{\alpha}_i \cdots \alpha_{p+1}}$$

で定義すると，$\delta \circ \delta = 0$．これは，下図のように升目を $+/-$ に塗り分けたものを割ってずらすと，対角線に関して反対称になることからわかる．

+	−	+	−
−	+	−	+
+	−	+	−

→

	−	+	−
+		−	+
−	+		−
+	−	+	

$\varepsilon = (-1)^p : C^{p,\,q} \to C^{p,\,q}$ とおくと，

$$(\delta+\varepsilon\mathrm{d})(\delta+\varepsilon\mathrm{d})=0.$$

1 の分解により，

$$0\to\Omega^q\to C^{0,\,q}\to C^{1,\,q}\to C^{2,\,q}\to\cdots$$

は完全であり，自然な複体の射

$$(\Omega^\bullet,\,\mathrm{d})\to(\bigoplus_i C^{i,\,\bullet-i},\,\delta+\varepsilon\mathrm{d}) \qquad (3)$$

がコホモロジーの同型を誘導する．

開集合 $U\subset M$ 上の実数値局所定数関数全体を $\mathbb{R}_M(U)$ とし，

$$C^p=\bigoplus_{\alpha_0,\,\ldots,\,\alpha_p}\mathbb{R}_M(U_{\alpha_0\cdots\alpha_p})$$

とおく．複体 $(C^\bullet,\,\delta)$ のコホモロジー $\mathrm{H}^q(\mathfrak{U})$ をチェック・コホモロジーという．自然な複体の射

$$(C^\bullet,\,\delta)\to(\bigoplus_i C^{i,\,\bullet-i},\,\delta+\varepsilon\mathrm{d})$$

は，$\mathfrak{U}$ が良い被覆，すなわち任意の空でない $U_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$ が可縮であるとき，コホモロジーの同型を誘導するので，(3) と合わせると，$\mathrm{H}^q(\mathfrak{U})=\mathrm{H}^q(M)$ がわかる（ドラームの定理）．

5. オイラー類

5.1 球面束と向き

各ファイバーが n 次元球面に同相 [微分同相] であるようなファイバー束を，n 次元球面束または S^n 束と呼ぶ．計量をもつ階数 $n+1$ の実ベクトル束 E に対し，各ファイバーにおけるノルムが1のベクトル全体は S^n 束になる．これを E に付随する球面束と呼ぶ．

向きづけ可能な多様体をファイバーとするファイバー束に対し，ファイバー方向の接ベクトルからなる実ベクトル束の向きを，ファイバー束の向きという．実ベクトル束の向きは，付随する球面束の向きを誘導する．

5.2 オイラー類の定義

向きづけられた S^1 束 $\pi:S\to B$ に対し，B の良い被覆 $\mathfrak{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ による向きをたもつ局所自明化が与えられているとする．$[\omega_\alpha]\in\mathrm{H}^1(\pi^{-1}U_\alpha)\cong\mathbb{R}$ をファイバー上の積分値が 1 であるような 1 次微分形式の類とすると，$U_{\alpha\beta}$ 上 $\omega_\alpha-\omega_\beta=\mathrm{d}\omega_{\alpha\beta}$ をみたすような $\omega_{\alpha\beta}\in\Omega^0(\pi^{-1}U_{\alpha\beta})$ が存在する．このとき，

$$\omega_{\alpha\beta\gamma}=\omega_{\alpha\beta}-\omega_{\alpha\gamma}+\omega_{\beta\gamma}$$

とおくと，$[\omega_{\alpha\beta\gamma}]\in\mathrm{H}^2(B)$．この類を S の**オイラー類**といい，$e(S)$ と書く．

向きづけられた S^n 束 $S\to B$ に対してもオイラー類 $e(S)\in\mathrm{H}^{n+1}(B)$ を同様に定義することができる．

- 切断が存在するとき，$e(S)=0$ である．
- オイラー類は，$\mathbb{Z}$ 係数コホモロジーの元として定義することもできる．
- 向きづけられた r 次元実ベクトル束 $E\to B$ に対して，付随する向きづけられた球面束のオイラー類を E のオイラー類といい，$e(E)\in\mathrm{H}^r(B)$ と書く．
- 向きを考えない M 上の S^{r-1} 束，階数 r の実ベクトル束に対しては，$\mathbb{Z}/2$ 係数コホモロジーに値をとる mod 2 オイラー類 $e(-)_{(2)}\in\mathrm{H}^r(M,\,\mathbb{Z}/2)$ が定義される．

5.3 カルテシアン射

ファイバー束 $\pi_j:E_j\to B_j$ $(j=1,\,2)$ に対し，連続 $[C^\infty]$ 写像 $\tilde{\varphi}:E_1\to E_2$ が $\varphi:B_1\to B_2$ 上のカルテシアン射あるいは束写像であるとは，各点 $p\in B_1$ において $\tilde{\varphi}$ がファイバー $(E_1)_p$ を $(E_2)_{\varphi(p)}$ 上に同相 [微分同相] にうつすことをいう．ベクトル束の間のカルテシアン射の場合は，さらにファイバーの間の写像が線型同型であることを仮定する．

向きづけられた S^n 束 $\pi_j:S_j\to B_j$, $(j=1,\,2)$，および，$\varphi:B_1\to B_2$ 上のファイバーの向きを保つカルテシアン射 $\tilde{\varphi}:S_1\to S_2$ に対し，$e(S_1)=\varphi^*e(S_2)$ である．

5.4 ギジン完全列

向きづけられた S^n 束 $\pi:S\to B$ に対し，

$$\mathrm{H}^{q-n-1}\underset{e}{\to}\mathrm{H}^q\underset{\pi^*}{\to}\mathrm{H}^q(S)\underset{\pi_!}{\to}\mathrm{H}^{q-n}\underset{e}{\to}\mathrm{H}^{q+1}$$

は完全である（$\mathrm{H}^j = \mathrm{H}^j(B)$, e はオイラー類をかける写像，$\pi_!$ はファイバー方向の積分）.

証明は以下のとおり．B の良い被覆 $\mathfrak{U}$ をとる．S の被覆 $\pi^{-1}\mathfrak{U}$ に対するチェック・ドラーム複体を考え，$\mathrm{d}_2^q : \mathrm{H}^q(B \times S^n) \to \mathrm{H}^{q+1}(B \times S^n)$ を

$$\mathrm{d}_2^q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{H}^q(B \times S^n) = \begin{bmatrix} \mathrm{H}^{q-n} \\ \mathrm{H}^q \end{bmatrix}$$

で定義すると，$\mathrm{H}^q(S) = \mathrm{Ker}\, \mathrm{d}_2^q / \mathrm{Im}\, \mathrm{d}_2^{q-1}$．このように，**ファイバー束のねじれは底空間の穴とファイバーの穴が相殺することで生じる．**

図式

$$\begin{bmatrix} \mathrm{H}^{q-n-1} \\ \mathrm{H}^{q-1} \end{bmatrix} \underset{\mathrm{d}_2}{\to} \begin{bmatrix} \mathrm{H}^{q-n} \\ \mathrm{H}^q \end{bmatrix} \underset{\mathrm{d}_2}{\to} \begin{bmatrix} \mathrm{H}^{q-n+1} \\ \mathrm{H}^{q+1} \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{H}^{q-n-1} \underset{e}{\to} \mathrm{H}^q \to \begin{bmatrix} \mathrm{H}^{q-n} \\ \mathrm{H}^q \end{bmatrix} \to \mathrm{H}^{q-n} \underset{e}{\to} \mathrm{H}^{q+1}$$

を追うと求める完全列が得られる．

5.5 応用

$BS^1 = \mathbb{P}^\infty(\mathbb{C})$ 上の普遍束の正規直交枠束 $ES^1 \to BS^1$ は S^1 束である．そのオイラー類を $e \in \mathrm{H}^2(BS^1)$ とすると，ギジン完全列より，$\mathrm{H}^*(BS^1)$ が多項式環 $\mathbb{R}[e]$ であることがわかる．

6. 同変オイラー類

量子力学に関わるもう一つの線型代数的概念として，群やリー環の**表現**がある．群の表現とベクトル束を合わせた概念が，**同変ベクトル束**である．

ベクトル束 $E \to M$ の全空間 E と底空間 M に群 G が作用していて，各 $g \in G$ が束写像を与えるとき，$E \to M$ を G 同変ベクトル束という．

これに対し，ボレル構成によってベクトル束 $E_G \to M_G$ が構成される．E が階数 r の向きづけられた実ベクトル束のとき，$E_G \to M_G$ のオイラー類 $e(E_G) \in \mathrm{H}^r(M_G)$ を E の G **同変オイラー類**という．

階数 r の複素ベクトル束 $E \to M$ は，階数 $2r$ の向きづけられた実ベクトル束の構造をもち，さらにスカラー倍によって S^1 同変ベクトル束になる．底空間 M への作用は自明なので，

$$M_{S^1} \cong BS^1 \times M, \quad \mathrm{H}^*(M_{S^1}) \cong \mathrm{H}^*(M)[e]$$

となる．$e \in \mathrm{H}^2(BS^1)$ は普遍 S^1 主束のオイラー類である．E の S^1 同変オイラー類は

$$e(E_{S^1}) = \sum_{j=0}^{r} c_j(E) e^{r-j}$$

と書ける．$c_j(E) \in \mathrm{H}^{2j}(M)$ を E の第 j チャーン類という．

なお，向きを考えない実ベクトル束 $E \to M$ はスカラー倍によって S^0 同変ベクトル束になり，S^0 同変 mod 2 オイラー類は

$$e(E_{S^0})_{(2)} = \sum_{j=0}^{r} w_j(E) {e_{(2)}}^{r-j}$$

と書ける．$e_{(2)} \in H^1(BS^0)$ は普遍 S^0 主束のオイラー類であり，$\mathbb{Z}/2$ 係数のギジン完全列により，

$$H^*(BS^0, \mathbb{Z}/2) = (\mathbb{Z}/2)[e_{(2)}]$$

である．$w_j(E) \in \mathrm{H}^j(M, \mathbb{Z}/2)$ を E の第 j スティーフェル–ホイットニー類という．

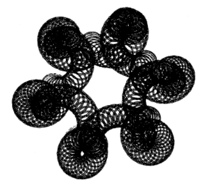
参考文献

1) スチーンロッド（大口邦雄訳）『ファイバー束のトポロジー』吉岡書店．
2) ミルナー–スタシェフ（佐伯修–佐久間一浩訳）『特性類講義』シュプリンガー・ジャパン．
3) ボット–トゥー（三村護訳）『微分形式と代数トポロジー』シュプリンガー・ジャパン．

（はしもと・よしたけ，東京都市大学知識工学部）

一般相対性理論と多様体

ホライズンの彼方へ



石橋 明浩

1. 多様体と相対性原理

多様体とは方眼紙で作ったハリボテである[1]．その心は，全体像が何であれ部分を拡大してみれば素性のよい目盛のついた平らな $\mathbf{R}^n$ と同じに見えるということである．ハリボテの曲がっているところは方眼紙を小さくとって滑らかに張り合わせ，重なり合う方眼紙片の目盛が互いにうまく読み取り合えるようにする．ひとたび方眼紙の張り合わせ方が決まれば，ハリボテ上に線を引いたり図柄を描いたりといった作業は，方眼紙片をはがして平らな机の上で行っても良いだろう．それらすべての方眼紙片をバインダーで束ねておいても，どんなハリボテを作成したかの情報は同じだ．一つ一つの方眼紙片を**チャート**または**座標近傍**，方眼紙の目盛を**座標**，重なり合った方眼紙片の目盛の読み換えを**座標変換**と呼ぶ．そしてチャートを集めてバインダーにまとめたものを**アトラス**と呼び，これさえ編纂されればハリボテの実体が何なのか把握できる．

多様体 M に時間間隔も含めた意味での“距離”を決める非正定値の計量 $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$ を与えた組 $(M, \mathrm{d}s^2)$ は**ローレンツ多様体**または**時空**と呼ばれる*1)．一般相対論は，重力は計量で完全に記述できるとする仮定の下，**アインシュタイン（Einstein）方程式**をもちいて時空多様体を決定する．その指導原理は**一般共変性**と**等価原理**である．時空多様体上で様々な物理量がスカラーやベクトルといったテンソル量として定義され，それらの運動方程式がテンソル方程式として記述されることで「物理法則はどの座標系でも同じ形式に書ける」という一般共変性が自然に満たされる．また等価原理は，時空多様体の各点でチャートを適切に（十分小さく）とれば，自由粒子が等速直線運動するような座標系（局所慣性系）が必ず取れ，局所的にはいつでも特殊相対論の世界 $(\mathbf{R}^4, \mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)$ が成り立つという主張になる．こうしてみると多様体は一般相対論の記述にぴったりであり，そのために発明されたのではないかとさえ思いたくなるほどである．

*1) 多様体と計量の組は一般に「リーマン（Riemann）多様体」と呼ばれる．計量の符号に着目した場合，非正定値ローレンツ（Lorentzian）計量に対して，正定値の場合を「リーマン的（Riemannian）」または「ユークリッド的（Euclidean）」計量と呼んで区別する．

2. イベント・ホライズンの向こうへ

アトラスの概念は，扱っている空間が一つのチャートで覆い尽くせないときにこそ真価を発揮する．例えば多様体として2次元球面を考えると，その全体を覆うには少なくとも2つ以上のチャートが必要となる．2次元球面と言えば地球表面を思い浮かべるだろう．仮にウルトラセブンが北極に立っていたとしよう．地表は丸いため，彼の視界には限界がある．この「見渡せる領域」を2次元の円盤 $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 < r^2\}$ に写しとることで，北極に立つセブンにとっての自然な地図（チャート）ができる．このチャートは有限であり，その境界は地平線や水平線からなる**ホライズン**である．その大きさを特徴づける半径 r はセブンの身長で決まり，たとえセブンが自身の身長を無限に高くしても*2)赤道面が視界の限界であり，そのホライズンを越えて南半球を見ることはできない．ホライズンの向こうにも陸地と海が続いていると知るためには，北極から移動して新しい視点から $\mathbf{R}^2$ 上の2次元円盤チャートを作り，それらを持ち寄って地表を網羅する

*2) 彼は自在に身長を変えられるはずだ．

地図帳（アトラス）を作成する必要がある．つまり，大域構造の理解にはアトラスが必要となる．

一般相対論においても以下に観ていくように様々なホライズンが現れる．大雑把には，観測者にとっての視界の限界としてのホライズンと，初期値問題を一意に解くことの可能な時空領域の境界としてのホライズンがある．前者は因果的な測地線，後者は空間的な超曲面の視点から定義される．いずれもローレンツ計量による時空の大域的因果構造を特徴づける概念であるが，ウルトラセブンの例のように，観測者や初期面にとっての“自然なチャート”について考察することでも理解できる．つまり自然に選んだ一枚のチャートだけではアトラスとして“足りなかった！”と気付かせてくれるのがホライズンともいえる．

例として，重い星が重力崩壊を起した結末にできると考えられる**ブラックホール時空**を考えてみよう．最も単純なものはアインシュタイン方程式の球対称静的真空解である**シュヴァルツシルト（Schwarzschild）時空**であろう．その計量は

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_{\rm H}}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{r_{\rm H}}{r}\right)} + r^2 d\Omega^2.$$

ここで $r_{\rm H}$ はブラックホールの質量 μ に比例する定数である（$r_{\rm H} = 2G\mu/c^2$）．また $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ として 2 次元単位球の計量を表す．ここで用いたシュヴァルツシルト座標 $U_{\rm S} = (t, r, \theta, \phi)$*3) の覆う領域は適切な角度座標範囲の他，$-\infty < t < \infty$，特に $r_{\rm H} < r < \infty$ で定義される．直ちに気づくように計量の動径座標成分 g_{rr} が $r \to r_{\rm H}$ で発散するからである．ここで適当な位置 $r > r_{\rm H}$ から $r = r_{\rm H}$ へ向かう自由粒子の測地線を考えてみると，その固有時間は有限であることがわかる．チャートの境界までの固有時間や固有距離が有限ならば，そこは (i) 時空が真に特異であるか，または (ii) 単純に座標系の振舞いが悪いだけかのどちらかであろう．実は後者であることが判明する．それには座標に依存しないスカラー量を曲率テンソル $R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}$ から構成し，$r \to r_{\rm H}$ でのその振舞いを調べてみればよい．例えば $R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta} = 12r_{\rm H}^2/r^6$ となり，明らかに $r \to r_{\rm H}$ で有界なので (i) のケースではない．実際，新しい座標 v を $dv = dt + (1 - r_{\rm H}/r)^{-1}dr$ の関係式により導入すると，計量は

$$ds^2 = -\left(1-\frac{r_{\rm H}}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2$$

と表され，$r = r_{\rm H}$ での見かけの特異性を消すことができる．このエディントン・フィンケルシュタイン（Eddington–Finkelstein）座標 $U_{\rm EF} = (v, r, \theta, \phi)$ は，$0 < r < \infty$ まで覆うことができる．「$U_{\rm S}$ で定義された多様体が，$U_{\rm EF}$ で定義されるより大きな多様体へ拡張された」といってもよい．

$U_{\rm EF}$ を用いて $U_{\rm S}$ の境界 $r = r_{\rm H}$ を見ると，そこは光的測地線の族を含む 3 次元の超曲面であることが分かる．また $U_{\rm S}$ の覆う領域で十分遠方 $r \to \infty$ を考えると，計量はミンコフスキー時空

$$ds^2 \approx -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

に近づき，時間軸 t は，ほとんど測地線に沿った観測者の完備（$-\infty < t < \infty$）な世界線とみなせる．従ってチャート $U_{\rm S}$ の光的境界面 $r = r_{\rm H}$ は「十分遠方の理想的観測者（$t \to \infty$ $r \to \infty$）が因果的に見渡せる領域の限界」と理解できる．このような境界は**事象地平面（イベント・ホライズン）**と呼ばれる*4)．ホライズン内部 $r < r_{\rm H}$ の情報は遠方の観測者に因果的に（光速かそれ以下の速度で）は伝わらないので，そこはブラックホール領域と呼ばれる*5)．

さてホライズンの内部はどうなっているだろうか？エディントン・フィンケルシュタイン座標 $U_{\rm EF}$ で $0 < r < r_{\rm H}$ の領域を考えると，$r \to 0$ で前出の $R_{\mu\alpha\nu\beta}R^{\mu\alpha\nu\beta}$ は明らかに発散する．また $r = 0$ へ向かう自由粒子の固有時も有限である．従って，そこは物理的に真の特異点であり，通常のローレンツ多様体の枠組みではそこを越えて時空を拡張することはできない．

座標系 $U_{\rm EF}$ は $U_{\rm S}$ よりは広い領域をカバーしているが，それでもシュヴァルツシルト時空を最大拡張した時空全体を覆うには足りない．それを一つで覆う座標系として，クルスカル・ツェケレス（Kruskal–Szekeres）座標 $U_{\rm KS} = (T, X, \theta, \phi)$ と呼ばれるものが知られている（図 1 参照）．ここで (T, X) は，座標 $U_{\rm S}$ の領域では (t, r) と次の関係にある．

$$X^2 - T^2 = \left(\frac{r}{r_{\rm H}} - 1\right)e^{r/r_{\rm H}},$$
$$\frac{T}{X} = \tanh\left(\frac{t}{2r_{\rm H}}\right).$$

*3) 以後，「チャート」や「座標系」「座標」といった言葉を区別せず，その領域も含めて U で表す．

*4) 北極に立つセブンが，たとえ“身長 $\to \infty$”としても赤道面がホライズンになるのと同じある．

*5) イベント・ホライズンやブラックホールの概念は，本来は時空の大局的概念として，座標系の言葉を使わないで定義できる[2]．

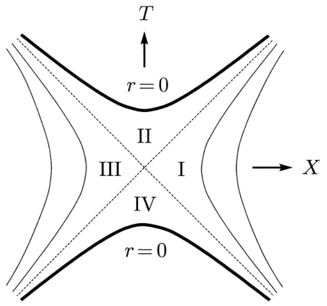


図1 最大拡張したシュヴァルツシルト時空 $U_{\rm KS} = \{{\rm I} \cup {\rm II} \cup {\rm III} \cup {\rm IV}\}$. 領域を分ける45度の線が $r = r_{\rm H}$ のイベント・ホライズン. ここではそれが未来的か過去的（ブラックホール的かホワイトホール的）かを区別せずに扱っている. $U_{\rm S}$ は領域 I（または III）に, また $U_{\rm EF}$ は領域 $\{{\rm I} \cup {\rm II}\}$ に対応する. $\{{\rm II} \cup {\rm III}\}$, $\{{\rm III} \cup {\rm IV}\}$, または $\{{\rm IV} \cup {\rm I}\}$ を覆うような $U_{\rm EF}$ も同様に構成できる. $r = 0$ は時空特異点であり, そこを越えては時空を拡張できない.

$U_{\rm KS}$ 座標での計量は

$$\mathrm{d}s^2 = -\frac{4r_{\rm H}^3 e^{-r/r_{\rm H}}}{r}(-\mathrm{d}T^2 + \mathrm{d}X^2) + r^2 \mathrm{d}\Omega^2$$

と表され, 真の特異点のある $r = 0$ 以外では明らかに正則になっている.

3. コーシー・ホライズンを越えて

ホライズンの概念は宇宙論でも頻繁に登場する. 宇宙論での基本時空モデルは時間一定面が3次元の一様等方空間の族になっているものであり, その計量は宇宙時間を t として,

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2 \left[\frac{\mathrm{d}r^2}{1-Kr^2} + r^2 \mathrm{d}\Omega^2\right].$$

ここで空間曲率のパラメーター $K = +1, 0, -1$ に対して, 時間一定面は, それぞれ $\boldsymbol{S}^3$, $\boldsymbol{E}^3$, $\boldsymbol{H}^3$ となる. 宇宙膨張の速さはハッブル・パラメーター $H \equiv \dot{a}(t)/a(t)$ で与えられる. スケール因子 $a(t)$ はもちろんアインシュタイン方程式で決定され, その振舞いは宇宙を満たす物質やエネルギーの性質と K に依存するが, 一般には $a(t) \to 0$ で“ビッグバン特異点”を持つ. ビッグバンからある時刻までに観測者が因果的関係を持ち得る領域の境界は, **粒子的 (particle) ホライズン**と呼ばれる. 宇宙論ではむしろ各時刻での宇宙膨張の典型的時間スケールの間に光が伝播する距離で決まる**ハッブル (Hubble)・ホライズン**に着目することのほうが多い. その大きさは cH^{-1} で与えられる.

この計量で表される時空のうち, 最も対称性が高い時空は**ドジッター (de Sitter) 時空 $\boldsymbol{dS^4}$** である. 幾何学的には, 正の断面曲率をもつ完備な定曲率空間であり, 物理的には, 正の宇宙項を持つアインシュタイン方程式の解で, 宇宙初期に起こったとされるインフレーションや現在のダーク・エネルギーに支配された宇宙のモデルになる. スケール因子は $K = +1, 0, -1$ に対して, それぞれ（H を定数として）$Ha(t) = \cosh(Ht)$, $\exp(Ht)$, $\sinh(Ht)$ と与えられる. このチャート $U_{\rm C} = (t, r, \theta, \phi)$ は, $K = 1$ の場合にはドジッター宇宙全体を覆う. 一方 $K = 0, -1$ の場合には, $t \to -\infty$ または $t \to 0$ で $a(t) \to 0$ となるが, ビッグバン特異点はなく, そこで時空は正則であることがわかる. ちょうど, シュヴァルツシルト座標 $U_{\rm S}$ の例で見たのと同様に, 単に $U_{\rm C}$ が $K = 0, -1$ の場合はドジッター宇宙を部分的にしか覆わないことを表しており, その境界は一種のホライズンとなる（図2(a), (b) 参照）. そこは $K = 0, -1$ の宇宙時間 t 一定面をコーシー面（初期面）としたときに, そこからの時間発展が初期条件のみから一意に決まる時空領域の境界を意味する**コーシー (Cauchy)・ホライズン**に対応する[*6)].

因みにドジッター時空上でもブラックホール的な座標系 $U_{\rm Static} = (T, R, \theta, \phi)$ がとれ, 計量は

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - H^2R^2\right)\mathrm{d}T^2 + \frac{\mathrm{d}R^2}{(1 - H^2R^2)} + R^2\mathrm{d}\Omega^2.$$

原点 $R = 0$ に静止している観測者にとっては $R = H^{-1}$ がイベント・ホライズン（粒子的ホライズンの $T \to \infty$ 極限）であり, ハッブル・ホライズンとも一致している（図2(c)）. 宇宙論的チャート $U_{\rm C}$ と見比べると（図2(a), (b)), $U_{\rm C}$ で宇宙膨張に乗った共動観測者（r：一定）は必ず $R = H^{-1}$ を横切ってホライズンの外へ出ることが明らかである.

宇宙時間一定面に対するコーシー・ホライズンの例として $K = -1$ の場合を考えよう. 簡単のため H を規格化し $r = \sinh\xi$ と置き換えると, 計量は

---

*6) ここでの例は初期面 (Partial Cauchy surface) の取り方によるものであり, 例えば $K = +1$ の宇宙時間で選んだ初期面に対してはコーシー・ホライズンは存在しない. どのように初期面を選んでもコーシー・ホライズンが存在する場合は「大域的双曲性の破れ」として時空の大域的因果構造を特徴づける. 電荷や角運動量をもつブラックホール時空がそのような例となる.

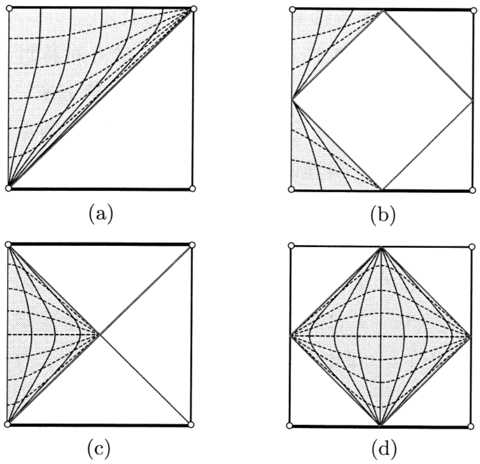


図 2　(a) 宇宙論的 $K=0$（平坦）チャート．(b) 宇宙論的 $K=-1$（負曲率）チャート．(c) 静的チャート．(d) 球面リンドラー・チャート $U_{\rm SR}$．本来は縦軸の時間方向は $-\infty < t < \infty$ なので，無限に伸びているはずである．また横軸方向もスケール因子 $a(t)$ のため $|t| \to \infty$ で指数関数的に大きくなっているはずである．しかし，それでは全体像が紙面に収まらないので，計量の共形変換により光円錐の構造を不変に保ったまま縮小してある．共形埋め込みによるこの様なコンパクトな時空図をカーター・ペンローズ（Carter–Penrose）図と呼ぶ[4]．

$$ds^2 = -dt^2 + \sinh^2(t)\left[d\xi^2 + \sinh^2\xi d\Omega^2\right].$$

この座標 $U_{\rm O} = (t, \xi, \theta, \phi)$ が覆う領域は図 2 (b) のようであり，図 2 (d) のように真中の正方形の領域を覆う座標系 $U_{\rm SR} = (\tau, \chi, \theta, \phi)$ は，解析接続 $\chi = \pm it$, $\tau = \xi \mp i\pi/2$ により得られ，計量は

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\chi^2 + \sin^2(\chi)\left[-\mathrm{d}\tau^2 + \cosh^2\tau \mathrm{d}\Omega^2\right]$$

と表せる．動径座標 χ 一定の超曲面は 3 次元のドジッター時空 $\boldsymbol{dS}^3$ になっている．この解析接続の様子から，$U_{\rm O}$ の空間的な $\boldsymbol{H}^3$ が光的であるコーシー・ホライズンを越えて $U_{\rm SR}$ の時間的超曲面 $\boldsymbol{dS}^3$ へと移ったともみなせる．いずれの超曲面も等長変換群 $SO(3,1)$ の軌道である．

4. コンパクト化とホライズンの向こう側

ここまでブラックホール時空やドジッター宇宙での様々なチャートとその境界にあるホライズンの例を見てきた．実はこのようなホライズンの構造は，座標系を取り換えることでミンコフスキー時空 (M, η) の上でも考察することができる．簡単のため 2 次元の場合を考えよう．

$$\mathrm{d}s^2 = -\chi^2\mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}\chi^2.$$

これは**リンドラー（Rindler）時空**と呼ばれるが，これが 2 次元ミンコフスキー計量に一致することは，座標変換 $X = \chi\cosh\tau$, $T = \chi\sinh\tau$ で標準的なデカルト座標 (T, X) に移ることから確かめられる．2 つの座標の関係式は

$$X^2 - T^2 = \chi^2, \quad \frac{T}{X} = \tanh\tau$$

であり，最大拡張したブラックホール時空を大局的に張る座標 $U_{\rm KS} \ni (T, X)$ とシュヴァルツシルト座標 $U_{\rm S} \ni (t, r)$ の関係式と類似している．リンドラー座標 (τ, χ) は，2 次元ミンコフスキー時空を図 3 のように分けたとき，左右 2 つの領域 L や R を覆う．領域 F や P へつなげるために，解析接続 $\chi = \pm it$, $\tau = \xi$ を行うと，

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + t^2\mathrm{d}\xi^2$$

となる*7)．ここで関係式

$$T^2 - X^2 = t^2, \quad \frac{T}{X} = \tanh\xi$$

が成り立つ．

ここで正定値計量のリーマン多様体とローレンツ多様体（時空）での違いが生じる例として，空間のコンパクト化を考えてみよう．図 3 の F の領域に注目す

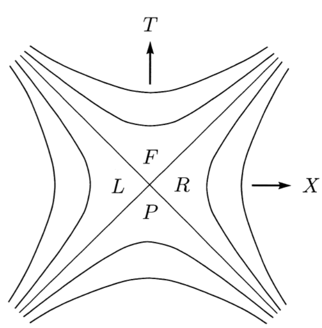


図 3　2 次元ミンコフスキー時空を原点からの光円錐で 4 つの領域に分割する．双曲線は，2 次元ミルン宇宙領域 F, P では t が一定線，リンドラー時空領域 R, L では χ が一定の線を表している．

*7)　この計量で $\mathrm{d}\xi^2$ の部分を $\boldsymbol{H}^3$ の計量 $\mathrm{d}\xi^2 + \sinh^2\xi\mathrm{d}\Omega^2$ に置き換えたものは，4 次元ミンコフスキー時空の一部（原点からの光円錐の内部）を $\boldsymbol{H}^3$ の族で覆った宇宙モデルになっており，**ミルン（Milne）宇宙**と呼ばれる．

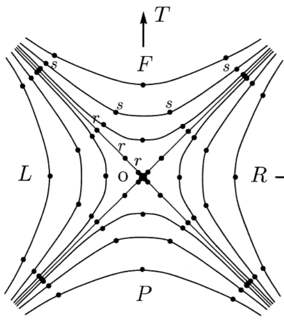


図 4 最大拡張した 2 次元ミスナー時空の被覆空間（2 次元ミンコフスキー時空）．双曲線上の点が $\gamma^m \in \Gamma$ により同一視される：$s = \gamma^m(s)$．原点 o は $\{\gamma^m(r)\}$ の集積点であり，取り除いて考える．

る（対応する多様体を M_F で表す）．そこで t が一定の線は，原点 $T = 0 = X$ からの固有時間が一定の双曲線であり，ローレンツ変換 $SO(1,1)$ で不変である．そこで $SO(1,1)$ の適切な離散的部分群 Γ でこの時空多様体 M_F を“割る”ことで空間方向をコンパクト化することができる．例えば $0 \leqslant \xi < \pi$ とするには，$SO(1,1)$ の作用のうち

$$\begin{pmatrix} T' \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\pi & \sinh\pi \\ \sinh\pi & \cosh\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ X \end{pmatrix}$$

を γ と表すと，γ^m（m は整数）で移り合える点を同一視すればよい．このようにコンパクト化された 2 次元宇宙モデル M_F/Γ を**ミスナー（Misner）時空**と呼ぶ．またミスナー時空の被覆空間 M_F のことを **2 次元ミルン宇宙**と呼ぶことにする．

一般に多様体 M に群 Γ が作用しているとき，もし以下の 2 つの性質が満たされれば Γ の作用は**真性不連続**（properly discontiuous）と呼ばれ，その場合には商空間 M/Γ は**ハウスドルフ多様体**になる．

(1) M 上の任意の点 q に対して，恒等変換ではないどんな $\gamma \in \Gamma$ に対しても $\gamma(U) \cap U = \emptyset$ となるような近傍 U がとれる．

(2) M 上の 2 点 q, r が $\gamma(q) = r$ となるような $\gamma \in \Gamma$ を持たないとする．このとき q と r それぞれの近傍 U, U' として，どんな $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ をもってきても $\tilde{\gamma}(U) \cap U' \neq \emptyset$ とはならないものが存在する．

条件 (1) は商空間 M/Γ が多様体となることであり，条件 (2) はそれがハウスドルフ空間となることを意味する．考える多様体が正定値計量のリーマン多様体の場合，等長変換群の離散部分群はいつでも真性不連続に作用することが分かっている．上に挙げた 2 次元ミルン宇宙 M_F からミスナー宇宙 M_F/Γ を作る例では，Γ の作用は真性不連続になっている．

さて，2 次元ミルン宇宙 M_F もリンドラー時空 M_R や M_L も一つのミンコフスキー時空 (M, η) の部分領域にすぎなかった．従ってミスナー時空 M_F/Γ の構成で行った Γ の作用も，ミンコフスキー時空 (M, η) 全体に拡張したいと思うところである．まず $t \to 0$ のホライズンを越えてリンドラー時空 M_R へと Γ の作用を拡張することは自然にできるだろう．ただし，そこでは Γ の作用する軌道が時間的であるため，M_R/Γ は時間的閉曲線をもち，因果律を破ることになる．もう一つのリンドラー時空 M_L への Γ の拡張も同様である．2 つのリンドラー領域 L, R のさらに過去にある 2 次元ミルン宇宙 M_P まで Γ の作用を拡張したいところであるが，ここで問題が生じる．(M, η) 全体への Γ の作用を考えるとき，原点 $\mathrm{o} \equiv \{T = 0 = X\}$ は変換の列 $\{\gamma^m\}$ の集積点となっているため，M/Γ は条件 (1) を満たさず，多様体にならない．そこで原点 o だけ取り除いた $(M \setminus \{\mathrm{o}\})/\Gamma$ を考えると，それは多様体となる．ただしその場合でも条件 (2) は満たされないので非ハウスドルフ多様体となる[2]．ミスナー時空の最大拡張時空 $(M \setminus \{\mathrm{o}\})/\Gamma$ は，局所的にはミンコフスキー時空であるが，原点 o を取り除いているため，そこへ向かう因果的測地線は不完備となり，その意味で時空特異点をもつ．このような特異点を**トポロジカルな特異点**と呼ぶことにする．

ここまで 2 次元時空の議論であったが，3 次元以上の宇宙を考える場合にはトポロジカルな特異点は，本質的に異なる様相を見せる．上で述べた 2 次元ミルン宇宙の代わりにドジッター時空で $K = -1$ の U_{C} チャートを考えよう．宇宙時間一定面は 3 次元双曲空間 $\boldsymbol{H}^3$ であり，$SO(3,1)$ がその等長変換群になる．$SO(3,1)$ の適当な離散部分群 Γ を考えると，その $\boldsymbol{H}^3$ への作用は真性不連続であり，$\boldsymbol{H}^3/\Gamma$ はコンパクト多様体である．これでコンパクトで負曲率の時間一定面をもつインフレーション宇宙モデルが構成できた．

次に解析接続によって，図 2 (b) にあたるコンパクト負曲率インフレーション宇宙を図 2 (d) の領域へ拡張し，そこで商空間 $\boldsymbol{dS}^3/\Gamma$ を構成したい．しかし時空次元が 3 次元以上の場合は，この段階で Γ の作用は真性不連続でなくなり，$\boldsymbol{dS}^3$ 上に集積点を持つことが分かる．2 次元の場合と同様，予め集積点を $\boldsymbol{dS}^3$ から

取り除いて考えればよいと思われるかもしれない．しかし，実は $\boldsymbol{dS}^3$ 上の集積点の存在がコンパクト負曲率空間 $\boldsymbol{H}^3/\Gamma$ 上の測地流のエルゴード的振舞いと関係しており，集積点は $\boldsymbol{dS}^3$ 上に稠密に存在することが証明される[3)]．従って，無理やり $(\boldsymbol{dS}^3 \setminus \{$ 集積点 $\})/\Gamma$ と商空間を定義しても，それはトポロジカルな特異点が稠密に存在する穴だらけの世界となり，もはや時空とは呼べないものになってしまう．つまりコンパクトな負曲率空間を持つインフレーション宇宙モデルは，コーシー・ホライズンを越えて時空を拡張できないという結論になる．

5. 結びに

一般相対論は太陽系から宇宙全体にわたるマクロなスケールでの重力の関わる自然現象を，極めて良い精度で説明しており，今のところその理論の根幹に変更を積極的に迫るような実験・観測結果はない．そして一般相対論の求める時空モデルはローレンツ多様体により最も自然に記述される．しかしブラックホールやビッグバン宇宙モデルに見られるように，またより一般にはペンローズ・ホーキング（Penrose–Hawking）の特異点定理[2)]にまとめられるように，一般相対論の時空モデルはしばしば特異点を許す不完備な多様体である[2)]．そのような時空特異点を理解するための基礎理論として，量子重力理論の構築が望まれているが，そこでは因果律など時空構造そのものが量子的に揺らぐと予想される．重力相互作用を含めた究極の統一理論を目指す超弦理論においては，時空はむしろ創発されるものであり，次元すらダイナミカルに決定されるべきものと捉えた研究が進んでいる．量子重力理論の探究が進む中，少なくともミクロなスケールでは多様体としての時空描像をいずれ放棄しなければならないのだろう．そのとき，どんな新しい時空概念が必要とされるのだろうか．

参考文献

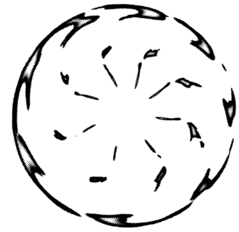
1) 谷村省吾：『理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何』（サイエンス社，2006 年 12 月）．
2) S.W. Hawking and G.F.R. Ellis: “The Large Scale Structure Of Space-time” Cambridge University Press (1973).
3) A. Ishibashi, T. Koike, M. Siino, and S. Kojima, *Phys. Rev.* D**54**, 7303 (1996).
4) カーター・ペンローズ図の構成については例えば文献 2) または佐藤文隆，小玉英雄：『一般相対性理論』岩波書店 (1992).

（いしばし・あきひろ，高エネルギー加速器研究機構）

好評発売中！！

SGC ライブラリ–70
重点解説 基礎微分幾何
曲面，多様体，テンソル，微分形式，リーマン幾何
塩谷　隆著／B5 判・216 頁・本体 1886 円
学部 2, 3 年生から大学院レベルの微分幾何の基礎を，特に重要と思われる事柄に絞って解説．微分積分と線形代数の知識があれば読めるよう配慮することで，数学科のみならず広く理工系一般の初学者にとっても受け入れやすい記述となっている．
主要目次　曲面　微分可能多様体　テンソル場と微分形式　リーマン多様体　補足
表示価格は税抜きです
［サイエンス社］

量子重力と多様体



河本 祥一

1. 重力と量子論

アインシュタインの一般相対性理論による重力の定式化は，多様体の言葉によってなされました．この一般相対性理論と並び立つ20世紀物理学の最大の成果といえば量子力学です．これまでに知られている4つの力のうち，電磁気力・弱い相互作用・強い相互作用は，ゲージ場の理論という形で量子化され，その成果である標準模型は，実験的にも非常に成功を収めています．ゲージ場の理論も，接続の理論として幾何学の言葉に翻訳することが可能であり，その意味で多様体を初めとする幾何の言葉は素粒子と相互作用の基礎理論を構築する上で欠かせないものと言えます．

片やマクロな世界を記述し，この宇宙の歴史や始まりについて考える際には欠かせない一般相対性理論．また一方，ミクロな世界について，時に我々の直感を大きく裏切りながらも実験を通してその正しさを証明してきた量子力学．ともに20世紀の物理学の大きな成功でありながら，今をもって手に負えない問題が，**量子重力**——重力理論を量子力学をもって書き直すこと——です．

重力もゲージ場の理論の一種として量子化しようとする試みがあります．マックスウェルの電磁理論を量子化した量子電気力学（QED）によれば，電磁波（光）はスピン1を持つ光子（photon）という粒子性を持ちます．重力理論において電磁波のように伝わる波である重力波も粒子的な描像を持ち，それはスピン2をもつ重力子（graviton）と呼ばれます．しかし，この重力場の量子論は，くりこみ不可能という大きな問題を抱えており，このアプローチはいまだ最終的な成功に至っていません．

この記事では少し視点を変えて，離散的な手法を用いた量子重力の幾何学的な定式化の試みについて述べたいと思います[1]．そこでは重力の量子論は様々な多様体の経路積分的な和として与えられ，古典的な一般相対性理論とは違う量子的な幾何学の様子を垣間見せてくれます．今回は厳密な定式化が可能な低次元重力，具体的には2次元重力理論を題材にその構成と**行列模型**との関わりを考えていきます．そして，擬球（pseudosphere）のような非コンパクト多様体が現れる不思議な様子について触れたいと思います．本稿を通して，良く知られた多様体を超えた量子重力，量子幾何の世界の空気を感じ取っていただければ幸いです．

1.1 経路積分

d 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ の中を運動する，自由な相対論的質点を考えてみましょう．この質点が，ある点 x から別の点 y まで経路 ω に沿って動くときの作用は次のようになります．

$$S(\omega) = m\int_{\omega} d\ell. \tag{1}$$

ここで m は質点の質量，ℓ は経路 ω 上の座標付けです．最小作用の原理によれば，古典的な運動はこの作用を極小にするような経路に沿って行わ

れ，自由な質点では2点 x と y を結ぶ最短のルート $\omega_{\min}$ に沿って動くことになります．今の場合，$\omega_{\min}$ は直線になります．

古典力学から量子力学に移行する際には，この2点を結ぶ独立な経路をすべて足し合わせる「**経路積分**」を考えることになります．このとき，各経路に与えられる重みは上で与えた古典作用で与えられ，x から y までのプロパゲーターは，

$$G(x,y)=\int_{(x,y)} D\omega e^{-S(\omega)} \tag{2}$$

となります．

今の場合は量子力学でしたが，電磁場のような「場」も同様に経路積分によって量子化することができます．例えば一番簡単な自由スカラー場の理論では，作用を

$$S[\phi]=\int_{\mathbf{R}^d} d^d x\, \partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \tag{3}$$

として，経路積分を

$$Z=\int D\phi e^{-S[\phi]} \tag{4}$$

のように定義します（これはプロパゲーターではなく分配関数と呼ばれる量です）．つまり，作用を重みにして力学変数について積分することで，量子論を考えることができることが分かります．

2. 離散的な面と幾何学の量子化

前節の結果から量子重力理論の分配関数を推定してみましょう．古典作用としては一般相対性理論の Einstein–Hilbert 作用を考えることにします．

$$S_{\mathrm{EH}}[g_{\mu\nu};\mu]=\int_{\mathcal{M}_g} d^d x\sqrt{g}(R+\mu)\,. \tag{5}$$

ここで $\mathcal{M}_g$ は計量 g を持つ d 次元の多様体，またここでは宇宙項 μ をパラメータとして入れ，式を簡単にするために Newton 定数を $16\pi G=1$ としました．今，力学変数は計量 $g_{\mu\nu}$ そのもので，素朴な分配関数は

$$Z(\Lambda)=\int Dg_{\mu\nu}e^{-S_{\mathrm{EH}}[g;\mu]} \tag{6}$$

のようになります．

一般には，この積分を実行するのは難しい問題です．この経路積分では異なる（リーマン）多様体をすべて足し上げていますが，一つの多様体 $\mathcal{M}_g$ を記述する計量は一般座標不変性のために無数に存在し，数えすぎを避けるためにはこの不変性を固定しなければなりません．計量を積分するのではなく，直接に独立な多様体を足し上げることはできないでしょうか？

ここで，離散化というアイデアを導入します．つまり，連続な多様体を，面なら小さなタイル，立体ならサイコロのような小さなブロックの集合体で近似するのです．この構成要素を単体と呼びます．こうして離散化したものは，多様体とは呼べない「がたがた」したものになりますが，構成要素が十分小さく数が大きい極限では，どんどんと元のなめらかな多様体に近づいていくと期待できます．このとき，異なる多様体というのは異なるブロックの組合せとして解釈することができそうです．以下では，一番簡単な2次元の面の場合にこのアイデアを紹介していきます．

まず，2次元のときには $\sqrt{g}R$ の項はダイナミカルでなく，オイラー数 $\chi=2-2h$ を与えます．また，$\sqrt{g}$ の項は2次元の面積になるので，(6) は模式的には

$$Z=\sum_{\text{geometries}} e^{-\mu A+4\pi\chi-\zeta L} \tag{7}$$

のように書けます．ただし面積を A とし，境界がある場合を考えて境界の長さ L とそれに共役な重み ζ も考えました（境界が複数あれば，それぞれに L と ζ を考えます）．宇宙項 μ が2次元の面積に共役な重みであったことに対応して，ζ を境界宇宙項と呼びます．形式的な和は異なる面を足し上げることを意味していて，その定義をこれから考えます．

2次元空間はいわゆる曲面なので，その上にタイルのように基本ブロックを敷き詰めて曲面を近似できます．まず，等しい大きさの正三角形を用いて面を近似することを考えてみましょう（この

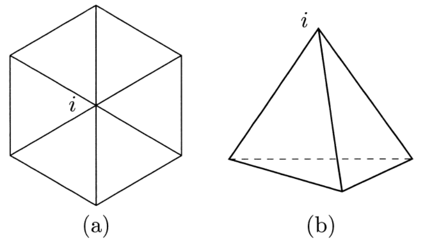


図 1　頂点 i に 6 つの三角形が集まった場合 (a) と 3 つの場合 (b).

場合の離散化の手法は，**力学的三角形分割**の方法と呼ばれます)．まず，平らな面を考えると 6 個の正三角形が一つの頂点を共有できます (図 1 (a))．三角錐をイメージすれば分かるように，頂点を共有する三角形の数が 6 からずれていると，その頂点は平らではなくなり曲率が集中します (図 1 (b))．具体的には，頂点 i に N_i 個の正三角形が集まった時の頂点でのスカラー曲率は $R_i = 2\pi(6-N_i)/N_i$ となります (6 より多いときは，双曲面のように負の曲率を持ちます)．曲がった多様体では各点が曲率を持つのですが，このように，平らな正三角形と曲率の集中した頂点を配置して曲面を近似していきます．図 2 はその例です．今は平面に描いているのでそう見えませんが，三角形はすべて同じ大きさの正三角形です．

さて，このようにして曲面を三角形の集合で近似した場合，2 次元面の経路積分は「可能なすべての正三角形の配置」を考えることになります．しかし，今度はこのような複雑な和をどうやって実行するかと言う問題が生じます．実は，行列模型という一見無関係のモデルが，この問いに素晴らしい回答を与えてくれるのです．

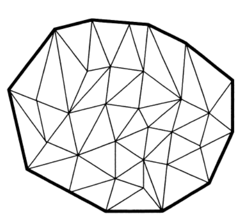


図 2　境界を一つもつ面（ディスク）の三角形分割の例.

2.1 三角形分割と行列模型

行列模型は次の行列の積分で定義されます.

$$Z[g] = \int dM\, e^{-N\mathrm{tr}S_m[M]}. \qquad (8)$$

ここで M は $N \times N$ のエルミート行列です．作用として一番単純な $S_m[M] = \frac{1}{2}M^2 + \frac{g}{3}M^3$ を考えましょう．この積分は，$gM^3/3$ の部分の指数関数を展開してどんどんガウス積分していくことで実行できます．このとき，展開した項をどういう組合せで積分するかを図示する方法があります．それがファインマン図と呼ばれるもので，例えば図 3 (c) のような図になります．3 つの線が集まる点（頂点）が M^3 の項に対応し，それを辺どうしで結ぶ部分がガウス積分の対応します．今の場合，6 つの頂点が含まれているので g^6 のオーダーの項の一つを書いていることになります．また，頂点で終わっていない辺 (外線と呼びます) が 6 つあり，これは 6 点関数の計算をしていることに対応しています (行列模型の詳しい説明は参考文献 2) を参照してください)．こうして，g^n の各次数毎に可能な頂点のつなぎ方を数え上げることで，行列模型の分配関数を計算することができます．では，この計算がどのように三角形分割に関わってくるのでしょうか？

図 3 (a) は，三角形 6 つ外周の辺の数 6 つの円盤の場合の簡単な三角形分割の例です．この図に次のルールで新たな線を引いていきます．1. 各面には新しい頂点を置く．2. 辺にはそれと交わって，新たな頂点どうしを結ぶ新たな辺を引く．3. 元々の各頂点は，新しくできた辺で囲まれる各面に一つずつ置かれるようにする．このような規則で描かれたものを，双対図と呼びます (図 3 (b))．少し

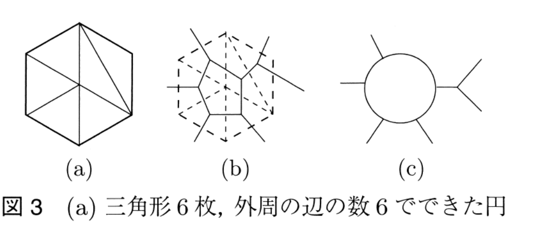


図 3　(a) 三角形 6 枚，外周の辺の数 6 でできた円盤．(b) (a) の双対図．(c) 行列模型のファインマン図の 1 例.

考えると，後者から同じルールで元の図を再現できることも分かります．さて，新たにできた図3(b)では，各頂点からはいつも3つの辺が伸びていて，さらに一番外に6つの終端があります（実線が双対図）．図3(b)と(c)を比べてみると，各頂点からはいずれも3つの辺が出ていて，しかも頂点をつなぐつなぎ方が等価になっていることが分かります．いま，三角形分割の図は，三角形の配置の仕方の情報を持っていたことを考えると，「頂点どうしのつなぎ方」はまさに三角形分割の仕方になります．つまり，ある三角形分割のやり方と上の行列模型の一つのファインマン図は1対1で対応しているのです．

今は同じ大きさの正三角形を考えているので，面の面積 A は三角形の数に比例し，境界の長さ L は境界の辺の数に比例します．双対図の作り方から分かるように，三角形の数 n は頂点の次数 g^n に対応し，辺の数は外線の数 ℓ に対応します（g は頂点に対する重みなので，実は宇宙項に対応することが分かります．境界宇宙項に対応するものも，行列模型には存在します）．前述の方法で行列模型の分配関数は計算が可能で，さらに三角形の数 n の期待値 $\langle n \rangle$ なども計算できます．実はこの $\langle n \rangle$ はある決まった値 g_c の付近で $(g-g_c)^{-1}$ のように振る舞うことが分かります．つまり $g \sim g_c$ では，無限に多くの三角形を使った分割が経路積分中で支配的になります．そこで，面の面積 A を一定に保つように，正三角形の辺の長さを0に近づけつつ，g も g_c に近づけるようにすると，有限の大きさの面を無限に小さい無限個の三角形の集まりで近似することができます．これを continuum limit と呼び，この極限の下で行列模型は2次元重力の分配関数を定義するのです．

ここまでは，三角形に絞って話を進めてきたのですが，四角形や六角形などを使うとどうなるでしょうか？ この場合，一般には三角形分割と同じ量子重力理論に帰着しますが，実は各多角形の重みを上手に調整すると，2次元面上にスピン自由度を導入することになり，2次元重力理論に物質場が結合した状況を実現できます[2)]．三角形のみの分割の場合は物質場の自由度は存在せず，pure gravity と呼ばれます．

2.2 ランダム面上の測地線距離とフラクタルな世界

量子重力において，距離はどのように定義されるでしょうか？ 多様体で用いられる通常の距離を採用するべきでしょうか？ 多様体上の距離は計量によって計られます．しかし量子重力においては，計量は経路積分されてしまう力学的な量であり，「距離」自体も積分されてしまう量になっています．もちろん，プランク定数が小さいときにはある決まった古典的な計量が支配的であり，これを用いて距離を定義できます．しかし，量子効果が強い領域では，計量を用いた定義は，その意味も不明瞭になります．

実は三角形分割を用いれば，物理的に満足できる距離を定義できます[3)]．これは簡単化して言えば，ある入口のループから出口のループまでの距離を，間に含まれる三角形の数を数えることで定義されます．

境界が2つある面は，ある閉じた弦が時間的に掃く面と解釈できます．これは図4(b)のように穴が一つ開いた円盤として表され，閉じた弦が移動する様子としては図4(a)のようなシリンダー（筒）になります．今の場合，図4(b)で一番外側が入り口のループ，内側を出口のループとします．入り口のループから出口のループまで何ステップかかるかを，次のように定義します．まず．入り

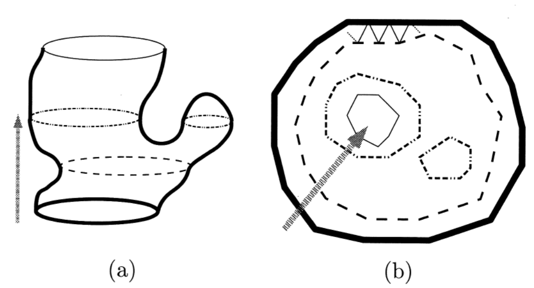
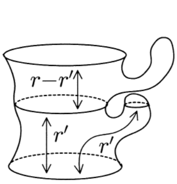


図4　シリンダー状の2次元面(a)と等価なディスク(b)．図(b)において一番外側のループに接する三角形を剥がして一つ内側のループに移る操作が，図(a)では一番下から一つ上のループへの時間発展に相当する．

口のループに辺を持つ三角形をすべて分割から取り除きます．こうしてできた新しいループが，出口のループと共通の頂点を持つならば，2つのループ間の距離は1です．そうでないときは，この新しいループに対して同じように三角形を剥がしていき，そのたびにステップ数を1ずつ増やします．このとき，三角形を剥がすことで，ループが2つにわかれてしまうことがあり得ます．今の変形のルールでは，こうしてできたループのうち，一つだけがいずれ出口のループに到達し，残りはどこかの時点で消えてしまうことがすぐに分かります．言い換えると，消えてしまうループは，「ふた」をされているわけです．このような，ループから真空への振幅は，ディスク振幅と言って行列模型の手法で計算することができます．したがって，こういう離れ小島になったループ部分は，いつでもディスク振幅で置き換えることにしましょう．こうしてできた面を図示すると，図4(a)のようになります．すなわち，入り口から出口までの主要な部分はちょうどシリンダーのような形になり，そこから真空に向かって消えるいくつかの枝分かれがある，という様子になります．

こうして，入り口から出口までのステップ数を定義できました．このステップ数に三角形のサイズをかけることで，ループ間距離 R が定義できます．そして，前述の連続極限を取ることで，測地線距離 R を持つ振幅 $N(\zeta,\zeta';R)$ が定義されます．ζ と ζ' はそれぞれのループの境界宇宙項です．今の場合重要なのは前述の連続極限において，この振幅が次の距離の加法性を満たすことが分かることです．

$$N(\zeta,\zeta';R)=\sum_{l}$$



$$\Bigg|_{r'\,\mathrm{fixed}} . \qquad (9)$$

l は中間に現れるループの長さで，長さ R のシリンダーは，長さ r' の中間状態の物を足し上げることで実現されるということを図示しています．幾何学的な距離がこのような加法性を持つというのは自然なので，これを我々の距離の定義とし，測地線距離と呼びましょう．

さて，この振幅の式は，連続極限において次の微分方程式を満たします．

$$\frac{\partial}{\partial R}N(\zeta,\zeta';R)=-\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(w(\zeta;\mu)N(\zeta,\zeta';R)\right). \qquad (10)$$

w はディスク振幅で，その連続極限は考えている理論によります．この方程式を積分すると，

$$N(\zeta,\zeta';R)=\frac{w(\hat{\zeta})}{w(\zeta)}\frac{1}{\hat{\zeta}+\zeta'}, \qquad (11)$$

$$R=\int_{\hat{\zeta}}^{\zeta}\frac{d\xi}{w(\xi,\mu)} \qquad (12)$$

となります．2番目の式は R から $\hat{\zeta}$ を求める式ですが，ここから R の次元を読み取ることもできます．pure gravity の場合の $w(\zeta)=(\zeta-\sqrt{\mu}/2)\sqrt{\zeta+\sqrt{\mu}}$ から，距離 R は長さ次元 $\frac{1}{2}$ を持ち，ある点から一定距離 R までの範囲の面積は R^4 に比例することが結論されます．通常の曲面ではこれは R^2 なので，この振舞いはなめらかな曲面とはかなり違ったものです．つまり今の場合，面はなめらかではなく前に出てきた小枝がびっしりと生えたフラクタルな面であり，そのため面積がなめらかなものよりも大きくなるということです．こうして，測地線距離を通して2次元量子時空のフラクタルな構造を垣間見ることができます．

2.3 擬球上の2次元重力

さて，分配関数(7)では，面積 A・境界の長さ L の面を μ と ζ のウェイトをかけて足し上げています．したがって，どのような大きさの2次元面が分配関数で支配的かは，期待値を求めてみることで分かります．トポロジーがディスクの場合の期待値は次のように求められます．

$$\langle A\rangle\propto\frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{1}{\zeta+\sqrt{\mu}}. \qquad (13)$$

これから，正の μ,ζ に対しては面積は有限になり，負の場合には面積は発散することがあるのが分かります．ただこの場合には，定義から分かるように分配関数も発散してしまいます．つまり，この定

式化は基本的に有限サイズの2次元面を記述している理論なのです．一つ興味深いのは，$\zeta \geq -\sqrt{\mu}$ の範囲では，負の ζ に対しても有限の面積を保っている点です．これは正の μ が境界が広がってしまうのをある程度妨げていると解釈でき，誘導された境界宇宙項とみなすことができます[4]．

では，無限に広がったような2次元面を考えてはいけないのでしょうか？ 実は，共形場理論という方法を用いた定式化では，擬球という非コンパクトな円盤に対応する量子重力的な状態が定式化できることが知られています[5]．擬球とは

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2} \tag{14}$$

という計量を備えた円盤（$|z| \leq 1$）として定義され，とくに境界付近で距離が指数関数的に発散しているという特徴を持ちます．

我々が手にした三角形分割による2次元重力の定式化では，このような面は経路積分の中に埋もれてしまったのでしょうか？ このような面を取り出して見てみることはできるでしょうか？

実は，面の「大きさ」を上で導入した測地線距離で測ることにすれば，それが可能なことが明らかになります．ある点から，距離 R の点が境界になるように取ったディスクを考えましょう．距離を測地線距離で測ると，ディスク振幅は次のようなものになります（$\alpha = \sqrt{3/2}$）．

$$w(\hat{\zeta}(R)) = (2\alpha \sqrt[4]{\mu})^3 \frac{\cosh\left(\alpha\sqrt{\mu}R\right)}{\sinh^3\left(\alpha\sqrt{\mu}R\right)}. \tag{15}$$

ここで，ディスクの有効境界宇宙項 $\hat{\zeta}(R)$ の値は，$\hat{\zeta}(R) = \frac{1}{2}\sqrt{\mu}\left(1 + 3\sinh^{-2}\left(\alpha\sqrt[4]{\mu}R\right)\right)$ です．今，非コンパクトな面が現れる様子を調べたいので，R が非常に大きな領域での面積の期待値を計算してみると，

$$\langle A \rangle \propto \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{1}{\zeta + \hat{\zeta}(R)} \tag{16}$$

となります．特に，共形場理論で擬球に対応する，$\zeta = -\hat{\zeta}(R=\infty) = -\sqrt{\mu}/2$ の場合，面積は

$$\langle A \rangle \propto \mu^{-1} e^{\alpha \sqrt[4]{\mu} R} \tag{17}$$

となって，期待通りに半径に対して指数関数的に面積が発散する振舞いを再現することが分かりました[4]．

3. 量子重力と新たな幾何学へ向けて

本稿では，経路積分形式から始まって，三角形分割による量子重力へのアプローチについて説明してきました．これまで見てきたとおり，このアプローチにおいては多様体は重力の記述においてもはや主役ではなくなってしまいました．

しかし，超弦理論を初めとする基本理論の探求においては，幾何学の言葉は欠かせぬ道具です．しかし，量子重力が重要な役割を果たすような領域においては，これまでの多様体を中心とした幾何学の言葉は，新しい言葉，量子幾何と呼ばれるようなものへ置き換わっていくことでしょう．超弦理論においては，弦のスケールと呼ばれる基本的な長さが存在し，このスケールで宇宙を見たときには，それはもはやなめらかな多様体ではなく，非可換幾何などの新しい構造を持った姿を見せると考えられています．このような考察を通じて，これまでとは違う新しい幾何学の言葉を手に入れたときに，量子重力はその本当の姿を表すのかもしれません．量子重力や弦理論の研究は，この先もまだまだ我々の知らなかった宇宙の姿を見せてくれるものと思います．

参考文献

1) 代表的な教科書としては J. Ambjorn, B. Durhuus and T. Jonsson, "Quantum geometry. A statistical field theory approach", Cambridge Univ. Press.
2) P.H. Ginsparg and G.W. Moore, arXiv:hep-th/9304011; P. Di Francesco, P.H. Ginsparg and J. Zinn-Justin, *Phys. Rept.* **254** (1995) 1.
3) H. Kawai, N. Kawamoto, T. Mogami and Y. Watabiki, *Phys. Lett. B* **306** (1993) 19.
4) J. Ambjorn, S. Arianos, J.A. Gesser and S. Kawamoto, *Phys. Lett. B* **599** (2004) 306
5) A.B. Zamolodchikov and A.B. Zamolodchikov, arXiv:hep-th/0101152.

（かわもと・しょういち，国立台湾師範大学）

弦理論と多様体



森山 翔文

1. はじめに

多様体と物理学の関連を示す最も重要な例の一つはおそらく超弦理論であろう．素粒子物理学では，統一理論や重力の量子論を動機として超弦理論を考えるが，実際に超弦理論の無矛盾性から時空（空間＋時間）の次元が9+1次元になることが予言される．現実的に観測されている3+1次元との整合性のために，空間6次元はまだ実験的に観測できないくらい小さく丸まっていると仮定する必要がある．つまり，この空間6次元は無限遠まで伸びる平坦な空間ではなく，コンパクトな多様体に置き換えて考える必要がある．この6次元のコンパクト化の仕方により，3+1次元の物理に大きな違いが生じる．言いかえれば，3+1次元の素粒子模型において，実験的に観測されている，あるいは，理論的に予想される超対称性やゲージ対称性を実現するための条件を，6次元多様体の数学的な性質に読み替えることができる．

このように物理学の動機により数学の研究が進み，また数学の研究が物理学の理解に寄与することは，歴史的に繰り返し行われてきたことである．例えば，近代物理学の原点であるニュートン力学では，質点の運動を記述するために，ニュートンの運動方程式が書き下され，その運動方程式が解析学という数学を発展させた．また，解析学や幾何学の進展により，楕円軌道運動など力学そのものの理解のみならず，さらに深いシンプレクティック構造が見出され，その発見が最終的に量子力学の定式化に繋がった．

本稿では，簡単に弦理論を紹介した後，物理的な要請からコンパクト化に用いる6次元多様体の数学的な性質を概観し，特殊な極限においてその6次元多様体を比較的簡単に調べられることを解説したい．

かの有名な，電子の相対論的な運動方程式を発見したディラックの言葉を借りれば，「自然法則は美しい方程式で表現されるべきだ」．ここでは，方程式を数学だと少し拡大解釈して，自然法則を表現する美しい世界を探検しよう．

2. 弦理論

ニュートン力学から始まる近代物理学の発展は，微視的な世界から巨視的な世界まで，様々な自然現象を普遍的な法則で説明することを目標としてきた．特に，素粒子物理学では，より基本的だと思われる微視的な世界を理解することを目指している．その素粒子物理学では今，すべての素粒子が弦からできていると仮定する超弦理論によって，微視的な世界を説明しようとする研究が行われている．では，なぜ超弦理論なのかという疑問が生じる．超弦理論を仮定する主な理由は，統一理論と重力の量子論である．ここでは，それぞれを詳しく見ていこう．超弦理論の「超」は超対称性を意味するが，超対称性を持たない弦理論は模型と

してそれほど有望ではないので，以後，超弦理論のことを単に弦理論と呼ぶことにする．

2.1 統一理論

統一理論の目指す方向を説明するには，物理学の発展を振り返るのが一番わかりやすい．人類の歴史において古代から天体の観測が行われてきた．その観測により，天体の多くは規則的な軌道を描いて進む恒星だが，日出時や日没時に地平線近くで不規則的な運動をする天体（惑星）もあることがわかった．惑星が不規則的な軌道を描くのは，同じく太陽の周りの楕円軌道上を運動している惑星地球から，他の楕円軌道上の惑星を見ているからだとケプラーが説明したのは，近代科学の夜明けと呼ぶのにふさわしい．さらに，莫大な惑星観測データは，実に簡潔にケプラーの三法則によってまとめられた．これだけでも驚くべきことだが，ニュートンはさらに惑星運動を含む多くの質点の運動を，運動方程式と万有引力から説明した．このような莫大で複雑なデータを簡潔な言葉で書き表す記念碑的な成功が，その後の物理学の規範になったと言っても過言ではない．統一理論を考える原点はまさにここにある．

物質の統一に目を向けよう[1)]．古代では，物質は火や水などを含む四大元素または五大元素からできていると思われていた．もちろん現代的な理解によれば，これに科学的な根拠はなく，物質は周期表にある原子からできている．これは正確な記述であるが，四大元素や五大元素と比べると，周期表ははるかに煩雑である．

周期表の興味深い周期性は実はより細かい構造を示唆していた．原子の構造を調べていくうちに，この周期表に対してより簡潔な理解ができた．原子は原子核と電子からできて，原子核は陽子と中性子からできている．周期表にある様々な原子の異なった物理化学的な性質は，主に陽子数の違いに由来していた．

その後の実験から，陽子と中性子の仲間が多く見つかった．その分類にリー代数の表現論が適用され，そこからさらに基本的な構造である 6 種類のクォークの発見に繋がった．また，電子は 6 種類のレプトンの一つであることがわかった．これら 6 種類のクォークや 6 種類のレプトンは実は漫然と並んでいるわけではなく，リー代数の表現論の立場から実に美しい規則性を持つものが三世代繰り返されている．このような規則性の背後には，より基本的な構造があるに違いない．

このように，多様性の発見と統一的な理解を繰り返すことで，より広範囲の物質がより簡潔な構成要素で説明できるようになった．これはまさに前述の惑星運動の物理学と同じ方向に進んでいると言えよう．

物質の間に働く**相互作用**に目を向けると，もともと異なった力だと思われていた電気と磁気は，マックスウェル方程式を通じて電磁波として表裏一体で伝搬することがわかってきた．古典的によく知られた重力と電磁力の他に，電磁力の仲間として，強い力と弱い力と呼ばれるものがあり，基本的相互作用は全部で 4 つ存在することが実験的にわかってきた．周期表からの物質の統一を見ると，それらの 4 つの力も統一的に理解したいという衝動に駆られる．電磁力と弱い力はヒッグズ機構を通じて巧妙に統一され，また強い力は電磁力や弱い力の仲間であることからも想像できるように，より大きな枠組みを用意すれば，電磁力，弱い力，強い力を統一的に理解できそうである．そのような試みが，大統一理論と呼ばれるものである．しかし，その枠組みに重力は入らないため，重力を含めた統一理論を考えるにはどうすればよいのかという疑問が残る．

素粒子物理学の最先端では，力も物質と同じく媒介粒子という形で存在していることが知られている．さらに弦理論では，より基本的な弦の存在を仮定することにより，様々な物質や力の媒介粒子をすべて弦の様々な振動モードから説明する，という方向に向かっている．

2.2 重力の量子論

弦理論を考えるもう一つの理由は，重力の量子論である．ここでは，現代的な量子論の考え方を解説して，重力の量子化における問題を説明した後に，弦理論においてどのように解決されるのか

を概観しよう．

ハイゼンベルグが提唱した行列力学や，シュレーディンガーが定式化した波動方程式が，実は同じ理論であることがディラックによって示されて，量子力学の定式化はひとまず完成した．ところが，実験結果を再現する計算方法は理解されたものの，演算子やら波動関数やら観測確率やら量子力学的な概念は古典物理をはるかに超越して，感覚的に理解しにくいものであったし，また，計算上の技術的困難もあった．

量子論の書き換えにおける大きな成功の一つは，ファインマンによる**経路積分**である．その考え方によれば，実現し得るすべての経路について，作用を位相因子とした重みで積分した値が量子論の観測確率である．このとき，位相因子の極値となる経路は互いに観測確率を強め合い，その結果，変分方程式の解析から得られる古典的な経路と一致する．それまでの量子論の定式化と比べて，よりわかりやすい概念的な理解を与えただけでなく，この経路積分の考え方に基づいて，多くの物理量を見通しよく計算できる．原理的には，あらゆる経路に関して足し上げればよい．

少し脇道に逸れるが，この考え方は生物学の進化論と似ているかもしれない．ダーウィンが提唱した進化論を解説した「利己的な遺伝子」[2]の説明によれば，生物はあたかも遺伝子が利己的に必要な能力を獲得していくように見えるが，本当は利己的な意思を持っているわけではなく，偶発的な突然変異により，生存に有利または不利となり，その結果，生存競争を通じて選択淘汰される．同様に，経路積分の考え方では，古典的に「利己的な電子」が一見利己的に位相をうまく強め合える経路を選んで運動しているように見えるが，量子論的には仮想的な経路で位相を獲得し，それが観測確率を強め合ったり弱め合ったりして，最終的に観測を通じて存在が決定される．

経路積分による量子論の定式化と，分配関数を用いた統計力学の解析が似ていることがよく指摘されるが，このような見方をすれば，すべての可能性に関して足し上げるという考え方は，物理学に限らず，数学における母関数の概念から生物学の進化論まで現代科学の根本にあると考えてもよいであろう．

さて，話を元に戻そう．上記の経路積分による量子論の定式化は無矛盾に構築されたので，それは直ちに電磁場の量子論などに適用された．しかし，そうした途端に物理量の計算に発散の問題が現れた．一般にあらゆる経路について積分するとき，運動量が大きい領域，または量子力学的には同値だが，距離の短い領域から発散が生じる．物理学者はその発散に長らく悩まされたが，最終的に場の理論の金字塔である繰り込み理論によって，その発散の処理方法が確立された．この繰り込み理論を適用するためには，ある条件を満たさなければならないが，それを重力理論は満たさない．そのため，重力の量子化は一般に難しい問題である．

一般に量子論では，中間状態にすべての粒子が現れるが，弦理論の場合において，様々な粒子の中間状態は単一の弦の振動モードで表されるので，中間状態についてすべて足し合わせると，弦の**モジュラー不変性**により経路積分の結果が有限になる．したがって，重力の量子化における無限大発散の問題は，弦理論に持ち上げると現れない．重力の量子論を考えるには，弦理論が最有力候補である．

3. コンパクト化

導入部分で説明したように，弦理論の無矛盾性から時空が9+1次元になる．ところが，実験的な事実（あるいは，日常的な経験）から，観測される時空はもちろん3+1次元時空でなければならない．その6次元の違いを説明する必要がある．一般的によく考えられている説明では，6次元部分は，現在実験で観測できないくらい小さくなっている．つまり，6次元部分をコンパクトな多様体に置き換えるべきだということになる．この6次元部分は現時点では観測できていないので，内部空間と呼ばれる．

3.1 指数定理

コンパクトな多様体をどのようなものに取るかは，観測される4次元の低エネルギー物理と深く関係する[3]．実際，10次元理論の運動項を4次元部分と6次元部分に分けると，一般に運動項は微分作用素なので，6次元部分の運動項は内部空間の座標を微分して，4次元部分から見たときの質量項に書き換えられる．6次元部分のゼロ固有状態以外に対して，4次元質量は，典型的には6次元多様体と同じくらいのスケールになる．いま6次元内部空間は観測できないくらい小さなスケールだと仮定しているので，その質量の粒子は観測できない．つまり，観測される実験事実と比較するためには，微分作用素のゼロ固有状態を考える必要がある．

多様体上のディラック微分作用素に対して，どれくらいゼロ固有状態が存在するかは，数学的に興味深い問題で，その解答を与えたのが**指数定理**である．超対称性を持つ理論では，ゼロでない固有値を持つ固有状態に対して，常に同じ固有値を持つ相手の固有状態を対応させることができるので，固有状態の数とその相手の固有状態の数の差は，ゼロ固有状態しか寄与しないことになる．指数定理は，その差をあらわな公式で与えている．

このような指数の概念が数学的に重要なのは，それが多様体の微小変形に対して不変だからである．多様体を変形すると，もちろん固有状態も変更されるが，超対称性を保つ限り，変更は常に相手の固有状態とペアで行われるはずである．変形によって，ゼロでない固有値がゼロになるかもしれないが，そのときは必ず相手の固有状態の固有値もゼロになるので，固有状態の数の差としては保たれる．

このような概念は物理の見方においても重要である．一般に粒子とその共役な粒子の間で質量項を組むことができる．弦理論において質量項を作ることができれば，質量は一般に弦のサイズになり，非常に重くなる．実験的に観測できる粒子であるためには，共役な粒子と質量項を組めない粒子である必要がある．つまり，粒子とその共役な粒子が完全にペアを組んだ後に，その残った粒子だけが観測されることになる．この残った粒子の個数が世代数に関係する．指数の詳しい解析から，世代数は，最も基本的な指数，多様体のオイラー数に対応することが知られている．

3.2 カラビ・ヤウ多様体

実験事実の解釈から，統一理論に超対称性を要請するのは自然だと思われている．4次元の低エネルギー物理に超対称性を要請したとき，6次元多様体（複素3次元多様体）に課すべき条件が有名なカラビ・ヤウ条件である．

カラビ・ヤウ条件を満たすコンパクトな**カラビ・ヤウ多様体**の分類は，数学的にも興味深い問題である．複素1次元カラビ・ヤウ多様体は平坦なトーラスしかないことが知られている．また，複素2次元カラビ・ヤウ多様体は，高次元トーラスの他に，豊かな構造を持つK3多様体と呼ばれるものしかない．K3多様体の構造の豊かさに惹かれて，これまで多くの研究が行われ，実に多くの美しい性質が知られている．

数理物理学の期待は，このような美しい性質が複素3次元にも一般化され，その結果，複素3次元カラビ・ヤウ多様体の分類に役立ち，オイラー数やホッジ数などの研究から4次元物理の理解へと繋がっていくことである．しかし，複素3次元カラビ・ヤウ多様体の分類論は難問である．その個数は実に天文学的な数字で，分類論に相当することはほぼ手つかずの状態である．これはある意味で自然界の奥深さを意味しており，残念ながら現在の理解によれば，弦理論からどのような4次元物理が実現されるかに関しては，それほど有力な予言を与えてくれない．

4. オービフォルド

上述のように，複素3次元カラビ・ヤウ多様体の研究は難問である．このとき，より簡単な例からヒントを得ることは有用であろう．では，いかに単純化すべきだろうか．

4.1 特異な多様体

読者の皆さんは，中学のときユークリッド幾何で，多角形の外角和は，多角形によらずに常に360度になることを勉強したかもしれない（図 1）．また，星型の内角和を求める問題を解いたことがあるかもしれない（図 2）．これらの定理は，大学の数学では，より一般的に（平面曲線の）ガウス・ボンネの定理となって現れる．この定理によれば，平面内の閉じた曲線の曲率を，その曲線に沿って積分していくと，整数値になる．これを簡単な言葉で言い換えれば，次のようになる．平面曲線の曲率は回転角と関連した量なので，定理の積分値は，曲線の道に沿って進めていったときに，自分が何度回転したかという値になる．閉じた曲線なので，最終的には同じ方向に戻る．これをうまく規格化すれば，回転した回数になり，整数値になる．

これを理解した上で，上記のユークリッド幾何の問題に戻ると，それは単に曲線の道をまっすぐ整備しただけのことで，本質的に同じ内容であることがわかる．同じ内容ではあるが，もちろん多角形の場合には，より多くの見方ができ，問題が簡単になる．上記の回転の見方をしなくても，例えば，多角形を三角形に分割すれば，三角形の内角和の公式を順番に使っていっても証明できる．ここで，次のルールを注意しておきたい．ユークリッド幾何の問題に対して回転の見方をするときは，もちろん自然な方向で回ることを仮定している．例えば，頂点に小さなロータリーを作って，そのロータリーを回ることを考えていない（図 3）．つまり，道の整備の仕方によって，考えている回転の回数を数える問題において，不定性が生じてはいけない．

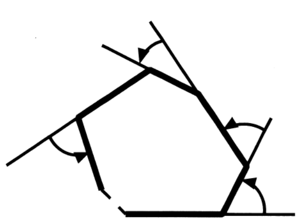


図 1　多角形の外角和は 360° である．

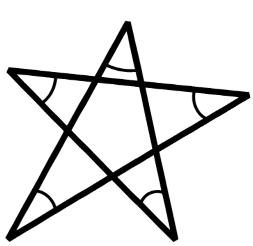


図 2　星型図形の内角和を求めよ．

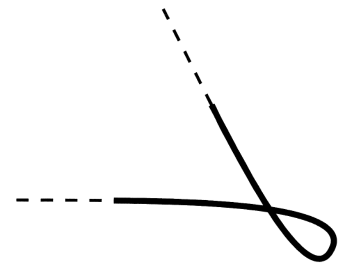


図 3　多角形の頂点に小さなロータリーのような構造を許してはいけない．

複素 3 次元カラビ・ヤウ多様体の研究も，考える問題によっては同様に単純化することができる．複素 3 次元カラビ・ヤウ多様体自体，複雑に曲がっており，これを研究の対象にしにくいのであれば，多様体をまっすぐ整備すればよい．つまり，多様体をきれいに折り畳んで，特異点を除いたほとんどの部分を自明にすれば，問題が簡単になることが予想できる．もちろん折り畳んだ後は，特異点が出てくるので，もはや滑らかな多様体ではない．このような特異な多様体は，**オービフォルド**と呼ばれる[4]．

多様体の数学的な定義では，局所的にユークリッド空間と同相であることを要請するが，オービフォルドの数学的な定義では，局所的にユークリッド空間またはその離散群による商空間と同相であることが要請される．ちなみに，オービフォルド（orbifold）の名前はorbit manifoldから来ている．ここで，manifoldはもちろん多様体だが，orbitは軌道と訳され，群作用によって同一視された商空間の元を指す．

このように，多様体を特異点をも含むように拡張することによって，非自明な部分を特異点の近傍に集めることができ，解析が簡単になる．実際，

オービフォルドは，カラビ・ヤウ多様体よりもはるかに簡単である．その代表的な優位は，弦理論に対してモジュラー不変な分配関数をあらわに構成できることである．

4.2 分配関数

分配関数は，閉じた弦の 1-ループ図形から計算される．閉じた弦が 1 回ループを作ると，弦の世界面はトーラスになり，トーラスはモジュライ τ で特徴づけられる．離散的なモジュラー変換，$\mathcal{T}:\tau\mapsto\tau+1, \mathcal{S}:\tau\mapsto-1/\tau$ により，トーラスの形は不変に保たれる．したがって，分配関数も，同じモジュラー変換に対して不変でなければならない．

オービフォルド上の弦理論を考えるときには，まず知られた多様体上の弦理論から始める．このとき，分配関数は上で注意したようにモジュラー不変である．オービフォルドの離散的な作用によって，その作用を尊重しない弦の状態は消去される．単に消去すると，もともとあった分配関数のモジュラー不変性はなくなってしまう．そこで，オービフォルド作用で弦の状態を一部消去するとともに，ツイスト弦と呼ばれる弦の状態を新たに付け加えるルールによって，モジュラー不変性を保つことができる．

話の類似として挙げたユークリッド幾何の問題の最後に注意したように，折り畳み方によって，考えている問題に不定性が出てはいけない．それと同様に，オービフォルド上の弦理論を考えるときに，特異点の存在が弦理論のモジュラー不変性を壊してはいけない．実際，モジュラー不変性は，重力の量子化における発散の問題を解決する鍵であったことを注意しておこう．

オービフォルド上の弦理論では，特異点の周りに局在するツイスト弦を付け加えたことによって，特異点は弦に包まれ，特に悪影響を及ぼさずに理論が定義できる．特異点の存在にも関わらず得られたこのような理論の整合性は，粒子と異なり，有限のサイズを持つ弦特有の効果である．

弦理論のモジュラー不変性を尊重した分配関数は，デデキントのエータ関数やヤコビのテータ関数などの保形関数を用いて構成される．これらの関数の美しい性質により，オービフォルド上の弦理論は，一般のカラビ・ヤウ多様体上の弦理論よりもはるかによく理解されている．

5. おわりに

このように弦理論の動機から始めて，幾何学の対象である多様体の研究へと話を進めたが，最後にはエータ関数やテータ関数など関数論，さらには，解析数論の分野にまで話が広がった．17 世紀の物理学の最大の目標は，力学を定式化して質点の運動を理解することで，その結果，解析学が生まれた．21 世紀の物理学において，弦理論を定式化してその特有の効果を理解し，実験的に検証されている素粒子の標準模型を導出することを目標として研究を進めていけば，どのような新しい世界が広がっていくのだろうか．

参考文献

1) F. ハルツェン（著），A.D. マーチン（著），小林澈郎（訳），広瀬立成（訳），『クォークとレプトン—現代素粒子物理学入門』，培風館 (1985).
2) R. ドーキンス（著），日高敏隆（訳），岸 由二（訳），羽田節子（訳），垂水雄二（訳），『利己的な遺伝子』，紀伊国屋書店 (2006).
3) M. Green, J.H. Schwarz, E. Witten: “Superstring Theory”, vol.1–2, Cambridge Univ Press (1986). 特に 12 章から 16 章までは弦理論とカラビ・ヤウ多様体の関係を詳しく論じている．
4) J. Polchinski: “String Theory”, vol.1–2, Cambridge Univ Press (1998). 16 章でオービフォルド上の弦理論を解説しているが，記述が難解である．

（もりやま・さねふみ，名古屋大学素粒子宇宙起源研究機構）

佐々木多様体と箙ゲージ理論との出会い

AdS/CFT 対応の魔法

山崎　雅人

1. 多様な森の個性的な仲間たち

一口に多様体と言っても，その生態は文字通り多様である．多様体のジャングルを駆け回って力の及ぶ限り多くの多様体を探索してみるのもいいが，時には気に入った多様体を見つけてじっくりと観察してみるのもまた格別である．

今回の話の主人公は，多様体の中でも特に**トーリック・佐々木・アインシュタイン多様体**（以下，長いのでしばしば単に佐々木多様体と呼ぶ）と呼ばれる仲間たちだ．名前の長さが示唆する通り彼らは強烈な個性と豊かな構造の持ち主であるが，21 世紀に入って再び注目を集めるまでほとんど忘れ去られた存在であった．本稿の目的は，物理学者たちが如何にして佐々木多様体たちに出会うことになったのか，そのいきさつと興奮を伝えることである．我々の舞台は超弦理論の世界，そこではDブレーンと AdS/CFT 対応の魔法によって佐々木多様体は箙（えびら）ゲージ理論へと変貌し，物理と数学の双方にまたがる美しい世界が姿を現す*1)．

2. 超弦の世界から佐々木が現れる

話の舞台は超弦の国，ここは仲が悪いとされている場の理論（量子力学）と重力の理論（一般相対性理論）が共存できるパラダイスである．我々は後者から出発しよう．超弦理論においては重力の低エネルギー有効理論は超重力理論で与えられる．超重力とは怖そうな名前だが，ここでは普通の一般相対性理論に電磁気の類似（例えば 4-form の場）を組み合わせたようなものだと思っておけば差し支えない．

超重力理論の解として，次のブラック 3-ブレーン解と呼ばれるものを考えよう：

$$ds_{10}^2 = f^{-1/2}(r)\, ds_4^2 + f(r)^{1/2}(dr^2 + r^2 ds_X^2). \quad (1)$$

ただし，ここで ds_4^2 の部分は平坦なミンコフスキー空間，X は 5 次元のアインシュタイン多様体（計量が $R_{\mu\nu} = 4g_{\mu\nu}$ を満たす）である．超弦理論では数学的整合性から時空が 10 次元に定まってしまうが，上の計量は合計でちゃんと 10 次元あることがすぐに確認できる．$f(r)$ を関数

$$f(r) = 1 + \frac{L^4}{r^4}$$

の形に取り，かつ超重力理論に存在する 4-form の場のフラックスを適当に選ぶことで上の重力場は運動方程式の解となる．

さて，上の式で $r \to 0$ の極限を考えよう*2)．このとき，計量の形は，r を定数倍で適当に変数変換してやると（計量全体の定数倍を除いて），

$$ds_{10}^2 = r^2 ds_4^2 + \frac{dr^2}{r^2} + ds_X^2.$$

*1)　佐々木多様体の幾何的側面については本誌の二木先生の記事を併せて参照されたい．また，この記事の内容のより詳細な紹介は 1) から手に入る．

*2)　この極限はしばしば near horizon 極限と呼ばれる．

この計量には2つの解釈がある．まず一つ目の解釈では，第1項と第2項をまとめて一つの多様体としてみることにして，5次元の反ド・ジッター空間*3)

$$ds^2_{AdS_5} = \frac{dr^2 + r^2 ds_4^2}{r^2}$$

と，残りの5次元多様体 X の直積とみる．もう一つの解釈は，第2項と第3項をまとめて

$$ds^2_{10} = r^2 ds_4^2 + \frac{1}{r^2}(dr^2 + r^2 ds_X^2) \qquad (2)$$

のように書く見方で，r のべき（歪み因子）を気にしないことにするとこれはミンコフスキー空間と Y の（歪んだ）直積である．ここで Y は X の計量錘と呼ばれるものであり，それは X に新たな座標 r を加え，計量を

$$ds_Y^2 = dr^2 + r^2\, ds_X^2 \qquad (3)$$

で与えた多様体である．r を定数倍してもこの計量は全体が定数倍されるだけなので，Y は名前の通り確かに錘になっている（図1を参照）．

さて，我々は以後の解析のために，上の解が超対称性の一部を保つことを要請しよう．一般相対性理論の教科書に出てくる対称性（等長写像）はキリングベクトル場で表されるが，ここでは超対称性を考えていて対称性はフェルミオニックなのでキリングスピノルの存在を要請する．このとき，Y は複素3次元のカラビ・ヤウ多様体と呼ばれる多様体である．Y がカラビ・ヤウであるときに，X が佐々木多様体であるというのが佐々木多様体の定義である．さらに，議論を具体的にするために，Y は（局所）トーリック多様体であるとし，このとき X もトーリックであると呼ぼう*4)．これは，大雑把に言えば Y がトーラス $U(1)^3$ の作用を持つことを意味しており，そのトーラスの作用の様子はトーリック図と呼ばれる $\mathbb{Z}^2$ の凸多角形から定まる．以上すべてを合わせると，X は5次元のトーリック・佐々木・アインシュタイン多様体であることになる．これが冒頭に出てきた多様体である．

*3) これはいわゆる双曲空間（の符号を一部逆にしたもの）のことである．

*4) この仮定は以下で述べるAdS/CFT対応（篩ゲージ理論との対応）には必要ではないが，以下の考察をはるかに具体的なものにする．

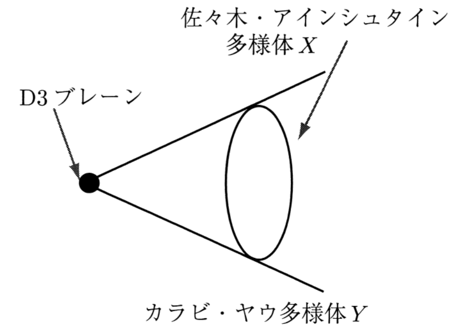


図1　錘のてっぺん（黒丸）にDブレーンを置く．

3. Dブレーンの魔法とAdS/CFT対応

さて，我々は5次元の佐々木多様体 X を使い，$AdS_5 \times X$ の形の重力解を構成した．これは，ブラック3-ブレーン解の極限として得られたものであった．

超弦理論には，ブラックブレーン解とよく似たものが存在する．それが**Dブレーン**だ．ブラックブレーン解とDブレーンが同一の物理的実体であることを看破したのがポルチンスキーであり，その考えをさらに徹底させて**AdS/CFT対応**を提唱したのがマルダセナ[2)]であった．AdS/CFT対応についての詳細な説明は本誌の以前の特集[3)]に譲るが，ここでは佐々木多様体に特に注目して少々説明してみよう．

ここではD3ブレーンと呼ばれる空間3次元，時間1次元に広がったブレーンを考える．式(2)のように，ミンコフスキー空間と錘 Y の直積を考え，その Y のてっぺんにD3ブレーンを置いて何が起こるか調べてみよう（図1）．Dブレーンは開いた弦が端を持ち，さらに開いた弦はゲージ理論を記述するので，Dブレーン上にはあるゲージ理論が現れることになる．D3ブレーンは(3+1)次元（ミンコフスキー空間）に広がっているので，これは4次元のゲージ理論である上，Y が錘であることに対応してスケール不変性を持つことが予想

される．どんなゲージ理論が現れるかは多様体の X のとり方によって変わるわけである．

さて，錘のてっぺんに置くＤブレーンの枚数を N 枚とし，N をどんどん大きくしよう．それぞれのＤブレーンは質量を持つので，一般相対性理論の教えるところによると周りの時空は歪み，やがてはブラックホールになるだろう．それが上のブラックホール解 (1) であると解釈するのである[*5]．

このことから予想されるのは

AdS/CFT 対応：Type IIB 超弦理論[*6] を $AdS_5 \times X$ の上で考えると，それは $R^{3,1} \times Y$ の錘の頂点に置かれたＤブレーン上に現れる４次元の超共形ゲージ理論と等価である．

ここで AdS_5 は５次元の反ドジッター多様体，CFT というのは共形場理論のことを指しており，前者の持つ対称性 $SO(4,2)$ が４次元共形場理論の共形対称性 $SO(4,2)$ と同一視される．

AdS/CFT 対応が最もよく知られているのは X が S^5 の場合であり，その場合対応するゲージ理論は $\mathcal{N}=4$ の超対称性を持つことから一意に同定できる．それでは X が一般の佐々木多様体のときどうなるだろうか？ $\mathcal{N}=1$ の超対称性を持つ共形場理論であることが予想されるが，より具体的にはどう決めればいいのだろうか？ それが次の問題である．

4. 具体例：$T^{1,1}$，コニフォールド

理解のためには具体例をあげるのが一番だ．ここでは $T^{1,1}$ と呼ばれる５次元佐々木多様体を考えよう．これは 80 年代から超重力の文脈で知られている古参の佐々木・アインシュタイン多様体である．$T^{1,1}$ の一つの記述は，２つの群の直積 $SU(2)_1 \times SU(2)_2$ を持ってきて，それをその対角 $U(1)$ ゲージ群 $U(1)_{\rm diag} \subset U(1)_1 \times U(2)_2 \subset SU(2)_1 \times SU(2)_2$ で割ったものであり，

$$T^{1,1} = \frac{SU(2)_1 \times SU(2)_2}{U(1)_{\rm diag}}.$$

計量の具体的な形は座標 $(\psi, \theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2)$ を用いて

$$ds^2_{T^{1,1}} = \frac{1}{9}(d\psi + \cos\theta_1 d\phi_1 + \cos\theta_2 d\phi_2)^2 + \frac{1}{6}(d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1 d\phi_1^2) + \frac{1}{6}(d\theta_2^2 + \sin^2\theta_2 d\phi_2^2)$$

で与えられる．但し，ここで $0 \le \psi \le 4\pi, 0 \le \theta_i < \pi, 0 \le \phi_i < 2\pi$ である．(ψ, θ_i, ψ_i) $(i=1,2)$ の部分に注目すると，S^2 上の S^1 ファイブレーションとして書かれた S^3 の計量になっており，S^2 は $SU(2) \simeq SO(3)$ の対称性を持つので，$SU(2) \times SU(2)$ の対称性を持つことが確認できる．また，計量テンソルを計算すると，これがアインシュタイン多様体であることが示せる：$R_{\mu\nu} = 4g_{\mu\nu}$．

さて，その計量錘 Y はコニフォールドと呼ばれており，複素数４つを用いて

$$z_1 z_2 = z_3 z_4 \tag{4}$$

と簡潔に書かれる．これは確かに複素３次元のカラビ・ヤウ多様体になっており，またスケール変換 $z_i \to \rho z_i$ の下で不変だから錘になっている．逆に佐々木多様体 $X = T^{1,1}$ を取り出すにはその自由度をなくしてしまえばよく，例えば条件

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_3|^2 + |z_4|^2 \tag{5}$$

の下での切り口が X となる．

問題は，これに対応するゲージ理論は何かであった．そこで (4) を解いて，

$$z_1 = A_1 B_1,\ z_2 = A_1 B_2,\ z_3 = A_2 B_1,\ z_4 = A_2 B_2$$

と書くことにしよう．この書き方には任意性があって，条件 (5) の下では

$$A_i \to e^{i\theta} A_i,\ B_i \to e^{-i\theta} B_i\ (i=1,2) \tag{6}$$

の任意性が残る．これは，ゲージ理論のゲージ変換に見えないだろうか？ また，(5) は超対称ゲージ理論の基底状態を決める式の一つ，Ｄターム条件と呼ばれるものとそっくりである．これは，超

*5) Ｄブレーン上の理論としてゲージ理論を取り出すには極限をとる必要があるが，それは重力側では上で議論した $r \to 0$ の極限と解釈される．

*6) 超弦理論の種類のことであるが，ここでは気にする必要はない．

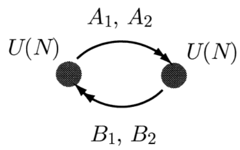


図 2 $T^{1,1}$ に対応する箙.

対称ゲージ理論の真空のなす空間と，コニフォールドが一致することを示しているのではないだろうか？

以上のような考察を推し進めることにより，クレバノフとウィッテン[4)]は，$T^{1,1}$ に対応するゲージ理論は (1) ゲージ群 $U(N)\times U(N)$ を持ち，(2) その下で $(N,\overline{N})$ で振る舞う場 A_i および $(\overline{N},N)$ を持つ場 B_i $(i=1,2)$ を持つと結論づけた[*7)].

このゲージ理論は，次の有向グラフ（**箙；えびら**）によって簡潔に表される（図 2）．グラフの頂点は $U(N)$ のゲージ理論を表し，また向きのついた辺は矢印の始点（終点）の頂点のゲージ群の下で $N(\overline{N})$ の表現に従う．このように，箙からはゲージ理論のゲージ群と物質場が指定される．

5. 無限個の佐々木，箙との対応

さて，$T^{1,1}$ の例は面白いが，高い対称性に助けられた側面がある．もっと他の佐々木多様体をたくさん作って，それに対応するゲージ理論が何であるか一般的に調べることはできないだろうか？それには佐々木多様体のほうでよく分かっているものから出発するのが賢明だろう．

実は，計量の具体形が知られている佐々木・アインシュタイン多様体は，長い間 S^5 と $T^{1,1}$ の 2 つの例だけであった．状況は 21 世紀に入ってから一変する．主に超重力理論のコンパクト化やブラックホール解の考察から，$Y^{p,q}$ [8)]および $L^{a,b,c}$ [9)]と呼ばれる無限個の 5 次元佐々木・アインシュタイン多様体の計量の具体形が発見されたのである[*8)].

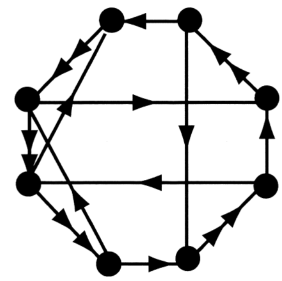


図 3 $Y^{4,1}$ に対応する箙.

これらは X がトーリックの例であるので，前に述べたように X はトーリックと限定しよう．この場合のゲージ理論は何だろうか？

ここでも活躍するのが D ブレーンである．超弦理論では T 双対と呼ばれる双対性が存在し，物理的に等価な理論の組を生み出す．我々が考えていたのはカラビ・ヤウ多様体 Y と D3 ブレーンの組合せであったが，これに T 双対を適当に施すと平坦な時空における D5 ブレーンと NS5 ブレーンの配位に写すことができる．これは平坦な時空の問題だから話は簡単で[*9)]どんなゲージ理論が出てくるかを読み取ることができる．これを Y がトーリックの場合に組織的にやる方法がブレーンタイリングと呼ばれるものであり，トーリック多様体のデータを与えたときに，対応する 4 次元の箙ゲージ理論を与えるアルゴリズムが確立している[*10)]．具体例として，$Y^{4,1}$ の場合に箙を与えておいた（図 3）.

さて，このことから以前の予想をより正確に書くと，

AdS/CFT 対応（再）：5 次元のトーリック佐々木・アインシュタイン多様体 X を考える．このとき，Type IIB 超弦理論を $AdS_5\times X$ の上で考えたものは，錘 Y から定まる箙の指定する 4 次元超対称ゲージ理論と等価である．

*7) どちらのゲージ理論についてのゲージ変換も (6) になる．

*8) p,q および a,b,c は適当な条件を満たす整数である．これらの佐々木多様体の計量の形は複雑であるが，例えば $Y^{p,q}$ で p と q が互いに素だと佐々木多様体のトポロジーは p,q によらずすべて $S^2\times S^3$ である．

*9) もっとも，カラビ・ヤウ多様体の情報を持っている NS5 ブレーンの形は複雑である．

*10) 正確には，箙だけでは理論のラグランジアンは指定されないが，ブレーンタイリングはその情報も与えてくれる．

6. AdS/CFT 対応の定量化

さて，上の予想をより定量的に具体的に見ていこう．ゲージ理論のほうには，QCD のときと同様，メソンやバリオンが存在する．また，ゲージ理論には大域対称性が存在する．その数を d と書くことにする．特に，バリオンのチャージがゼロ（ノンゼロ）である対称性をメソニック（バリオニック）対称性と呼ぶ．この数は，

$$\#(\text{メソニック対称性}) = 3,$$
$$\#(\text{バリオニック対称性}) = d-3$$

となっている．佐々木多様体のほうには，まず，トーラス $U(1)^3$ に相当する等長写像が存在する．この数は 3 であり，これはメソニック対称性の数と同じである．一方，佐々木多様体に 3-サイクルが存在すると，D3 ブレーンと呼ばれるブレーンがそのサイクルを巻いてそれがバリオンに見えることが知られている[*11]．

$$\dim H_3(X) = d-3$$

であるから，この数が上で書いたバリオニック対称性の数と一致するのである．ここで注目すべきは，重力側では全く違うように見える等長写像と 3-サイクルが，ゲージ理論側ではともに大域対称性として見えることである．

7. 変分問題の対応

さて，話はまだ終わりではない．ゲージ理論側では理論は共形場理論であると書いたが，実は今まで議論してきた箙ゲージ理論は UV での記述であり，それが繰り込み群の下で IR の固定点に流れていくと考えられているのだ．IR では超共形対称性を持ち，特にその代数の中に **R 対称性**（$U(1)_{\mathrm{CFT}}$ と書こう）が存在する．繰り込み群が関わってくるので，$U(1)_{\mathrm{CFT}}$ は UV では上に書いた d 個の対称性が混じり合ったもであると考えられ，それが正確に何であるのかを知るのは簡単ではない．つまり，UV での R 対称性（R でない対称性）の生成子を R（F_I, $I=1,\cdots d-1$）と書くことにすると，$U(1)_{\mathrm{CFT}}$ の生成子は実数 t_I を用いて

$$R_t = R + \sum_{I=1}^{d-1} t_I F_I$$

のように書けるはずである．この不定性 t_I を決めるのが a-maximization[6] である．

上で書いた $U(1)$ 対称性 R_t に対して，関数

$$a[t] = \frac{3}{32}(3\mathrm{Tr}R_t^3 - \mathrm{Tr}R_t)$$

を考えよう．ここでトレースは理論に存在する物質場についての和である．主張は，R 対称性 $U(1)_{\mathrm{CFT}}$ は上の関数を局所的に最大化するというものである．$a[t]$ は単純な 3 次関数だから，$U(1)_{\mathrm{CFT}}$ を決めるのはこの主張を認めれば簡単だ．

実は，$a[t]$ の極値における値は，4 次元共形場理論の**中心電荷**と呼ばれる重要な量であり，繰り込み群の流れに沿って単調減少すると予想されている．さらに，AdS/CFT 対応は，ゲージ理論に対応する佐々木多様体 X の体積との間に次の関係式を予言する[5]：

$$\mathrm{Vol}(X_5) = \frac{\pi^3}{4}\frac{1}{a}. \qquad (7)$$

これを佐々木多様体の側で再現することはできるだろうか？ $Y^{p,q}$ の場合には計量が知られているのでこれは単純な計算だが，計量の計量の具体形が知られていないその他のトーリック佐々木多様体についてはどうだろうか？ AdS/CFT 対応を信じれば答えは知っているが，もっと直接的に佐々木多様体の側からこれを理解する方法があるはずだ．

この問題に対する答えを与えたのがマルテリ，スパークスとヤウ[7] である．興味深いことに，それは再び変分問題として定式化できるのである．

佐々木多様体 X とその計量錘 Y との関係を思い出そう．これは少々微妙な問題である．Y を与えると X は式 (3) によって一意に定まるが，逆に Y から X を復元するには r が Y の座標系で書いたときに何であるかを知らなければいけない．そのためにしばしば使われるのが**リーブベクトル**

*11） D3 ブレーンの結合する 4-form の場が佐々木の 3-form と AdS_5 の 1-form に分解する．

$\xi = J(r\frac{\partial}{\partial r})$ である．ここで J は Y の複素構造である．X がトーリックの場合には，$U(1)^3$ の座標 $\phi_i\,(i=1,2,3)$ を用いて

$$\xi = \sum_{i=1,2,3} b_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}$$

のように書くことができ，ξ を決めることは b_i を定めることと等しい．

b_i の値はは佐々木・アインシュタイン多様体では一意に決まっているが，b_i を変化させ（そのとき X はアインシュタインではなくなる），その佐々木多様体の体積を関数 $V[b]$ と書こう．主張は，リーブベクトル場に対応する b は $V[b]$ を最小化するというものだ．$V[b]$ はトーリックの場合には具体的な関数形が書けるので，これはすぐに実行できる手続きであり，こうして求めた体積は見事にゲージ理論からの予言 (7) を満たすことが確認できる*12)！ こうして AdS/CFT 対応のまた一つ定量的なチェックがなされたのである．

8. 佐々木の世界の広がり

さて，ここまでが本稿の主たる内容だが，佐々木多様体とゲージ理論の対応はまだまだ続く．例えば，トーリックでないあるクラスの佐々木多様体の場合には，佐々木・アインシュタイン多様体の計量の存在がゲージ理論側での固定点の存在と対応するという主張がなされている[10]．またここで考えたのよりもより一般のコンパクト化を考えたときには，「一般化された」佐々木多様体が現れることが知られており，ごく最近その体積の変分問題も議論されている[11]．

また，ここまでの話は 5 次元の佐々木多様体に特化してきたが，他の次元ではどうだろうか？ 例えば 11 次元で定義された M 理論に存在する M2 ブレーン解から出発して本稿と同様の考察をすると，X を 7 次元佐々木・アインシュタイン多様体としたとき，$AdS_4 \times X$ 上の M 理論とを M2-brane 上の (2+1) 次元超対称場の理論が等価であることが予想される．M2 ブレーン上の理論については最近チャーン・サイモンズ項を持つゲージ場と物質場とが結合した理論であることがわかってきており，佐々木多様体との対応も種々の場合に議論されているが，5 次元の佐々木の場合に比べると分かっていないことも多い．

佐々木・アインシュタイン多様体は長らく多様体の世界の異端児とみなされてきたが，超弦理論の研究はその豊かな世界を探求する強い動機を与え，箙ゲージ理論との対応を明らかにした．佐々木多様体の研究が本格的になされたのはごく最近，21 世紀になってからであり，その含意するものは到底尽くされていないと言えるだろうが，我々が学んだものは既に劇的である．多様体のジャングルの中にはさらにどんな驚きが待っているのか，そして超弦の魔法はそれらについて何を教えてくれるのか，未知の世界への期待に胸が高まる．

*12) 実は，$a[t]$ と $V[b]$ の間には，極大／極小化する前にも等価性が成り立つことが示されている．

参考文献

1) 山崎雅人，http://www.princeton.edu/~masahito/files/2007/kinosakisasaki.pdf
2) J.M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998) [*Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1113 (1999)] [arXiv:hep-th/9711200].
3) 数理科学 2008 年 2 月号，特集：ゲージ重力対応．
4) I.R. Klebanov, E. Witten, *Nucl. Phys.* **B536**, 199–218 (1998). [hep-th/9807080].
5) S.S. Gubser, *Phys. Rev. D* **59**, 025006 (1999) [arXiv:hep-th/9807164].
6) K.A. Intriligator, B. Wecht, *Nucl. Phys.* **B667**, 183–200 (2003). [hep-th/0304128].
7) D. Martelli, J. Sparks and S.T. Yau, *Commun. Math. Phys.* **268**, 39 (2006) [arXiv:hep-th/0503183].
8) J.P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks and D. Waldram, *Adv. Theor. Math. Phys.* **8**, 711 (2004) [arXiv:hep-th/0403002].
9) M. Cvetic, H. Lu, D.N. Page and C.N. Pope, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 071101 (2005) [arXiv:hep-th/0504225].
10) J.P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks and S.T. Yau, *Commun. Math. Phys.* **273**, 803 (2007) [arXiv:hep-th/0607080].
11) M. Gabella and J. Sparks, arXiv:1011.4296 [hep-th].

（やまざき・まさひと，プリンストン大学）

何故かいま佐々木多様体

二木 昭人

1. はじめに

佐々木多様体，とりわけ佐々木・アインシュタイン多様体が近年数学でも物理でも盛んに研究されている．ケーラー幾何を専門とする数学者である筆者が佐々木多様体の研究をするに至った経緯や，筆者から見た佐々木多様体について述べたい．

佐々木多様体は佐々木重夫（1912–1987）の研究[12, 13]に端を発することからこの名前がつけられている．当初，佐々木構造はnormal contact metric structureという名で呼ばれていた．この名が示すように佐々木多様体は接触多様体の一種であり，従って奇数次元多様体である．佐々木多様体はケーラー多様体の奇数次元類似物であると謂われる．ケーラー多様体というのはひとくちに言うと複素多様体であり，シンプレクティック多様体でもあり，リーマン多様体でもあり，この3つが密接に関連するような多様体のことである（図1左）．従ってもちろん実多様体としては偶数次元である．これに対し佐々木多様体はひとくちに言うとCR–多様体であり，接触多様体でもあり，リーマン多様体でもあり，この3つが密接に関連するような多様体である（図1右）．従って佐々木多様体は奇数次元実多様体である．

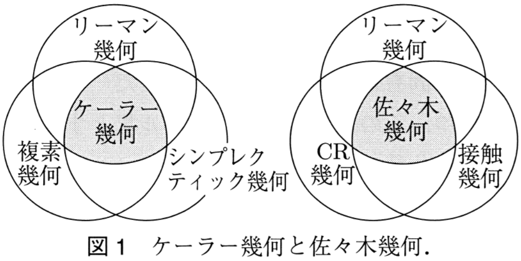


図1　ケーラー幾何と佐々木幾何．

ケーラー多様体の幾何は，複素幾何とリーマン幾何を結ぶ役割を果たすことからその重要性は容易に認識されよう．例えばコンパクトケーラー多様体においてはドルボーコホモロジーとドラームコホモロジー（の複素化）は同型で，従って特異コホモロジーもこれらを通して理解される．射影代数多様体はコンパクトケーラー多様体であるから，ケーラー幾何の代数幾何への応用があることは直ちに認識される．この他，多変数複素函数論との関わりも容易に認識されよう．これに対し，佐々木多様体の幾何学は微分幾何以外の他分野の数学への直接的応用は思い当たらない．このため，佐々木多様体はリーマン幾何の専門家の間（および多変数複素関数論とCR幾何の境界分野の専門家）では知られていたものの，ケーラー幾何ほどの広がりをもった発展をしてこなかったと言っても言い過ぎではないであろう．

筆者が初めて佐々木多様体に興味を持ったのは文献1)を読んだときが最初ではなかったかと思う．この論文が発表された頃，Killing spinorを持つ多様体の分類が興味を持たれていた．この論文はKilling spinorを持つn次元リーマンスピン多様体Mに対し，その錐多様体には平行spinorが存在するのでホロノミー群が$SO(n)$より真に小さくなり，従ってBerger–Simonsの定理から

ホロノミー群は分類されることを主張している．その一つの例として現れるのは錐多様体のホロノミー群が $SU(n/2)$ になる場合，すなわちリッチ平坦なケーラー多様体の場合である．この場合，もとのリーマンスピン多様体 M は佐々木・アインシュタイン多様体である．

その後，1997 年頃から Boyer と Galicki および彼らの共同研究者により佐々木・アインシュタイン多様体の構成が研究されるようになった[2~4]．Boyer と Galicki は四元数ケーラー多様体に対する興味から，四元数ケーラー多様体（またはオービフォールド）上のオービ束として現れる 3–佐々木多様体に注目し，さらにそれらを含むより一般の佐々木・アインシュタイン多様体の研究に進んだ．彼らの 10 年におよぶ研究は 2007 年に発刊された本[4] にまとめられている．この本を書き上げた直後に K. Galicki は南アルプスで休暇中に事故死した．彼らの研究で得られる佐々木・アインシュタイン計量は quasi-regular な佐々木構造になっており，実際上，ケーラー・アインシュタインオービフォールドの構成になっている．手法としては Nadel, Demailly, Kollár による乗数イデアル層の非存在を証明する方法である．結果として，異種球面にも多くの佐々木・アインシュタイン計量が入ることがわかるなど，驚くほど強力な結果が得られている．

一方物理おいては，AdS/CFT 対応の研究から佐々木・アインシュタイン多様体に対し興味を持たれた．AdS は anti-de Sitter 空間（定曲率ローレンツ多様体）の略で，CFT は conformal field theory の略である．この両方の側にある理論が同値であるという予想を確かめるために両方の側の理論値が一致することを計算により確かめることにより，予想の確かさを検証することが試みられた．このために，5 次元の佐々木・アインシュタイン多様体がいくつも構成された[8,9]．この例では irregular な佐々木構造になっており，このような例は Boyer, Galicki たちの方法では構成できないものであった．もちろん，これによる両側の理論値の計算は一致し，予想の確かさが検証された．

こうした背景について，筆者は知らなかったのであるが，Guofang Wang 氏からケーラー多様体の場合に私が定義した “二木不変量”[6] を佐々木多様体の場合にも定義できると言われたのが，佐々木多様体に興味を持ったきっかけであった．Guofang Wang 氏からこのように言われたときは，半信半疑であった．なぜならこの不変量は正則ベクトル場のなす複素リー環の指標として定義されるものであるが，奇数次元実多様体に正則ベクトル場など存在しないからであった．そもそも私は佐々木多様体の定義もそのときには知らなかった．しかし，Wang 氏から佐々木多様体の説明をしてもらううちに，定義できるかもしれないと考え始めた．実際，定義自体はできるということがわかったのであるが，それがそれ以上の意義を持つかは，どういう応用が可能かにかかっていると考えた．そこで，X.J. Wang–X.H. Zhu[14] によるトーリック Fano 多様体上の Kähler–Ricci soliton の存在定理を佐々木多様体の場合に拡張することを考えた．この共同研究[7] を進めるうちに現れたのが，文献 10,11) である．この 2 つの論文の主張することは次の通りである．AdS 側の理論値を計算するのに佐々木・アインシュタイン計量を具体的に求める必要はない．Reeb ベクトル場（これの説明は後回しにする）を固定し，横断ケーラー構造を変形すると佐々木多様体の体積は変わらない（これはケーラー幾何において，コホモロジー類を固定して，そのコホモロジー類のなかでケーラー形式を変形しても体積は変わらないのと同様である）．そこで，トーリック佐々木多様体において，Reeb ベクトル場になり得るトーラスのリー環の錐において，ある超平面で切った切り口を考え（これは Hilbert–Einstein 汎関数の臨界点となるための自然な条件である），その上で体積汎関数を考える．この汎関数は定義域である錐と超平面の切り口で強凸かつ固有になっているので，ただ一つの最小点を持つ．この点を Reeb ベクトル場とする佐々木構造の体積は容易に双対錐（モーメント写像の像）の特性超平面の切り口の体積として容易に計算される．この計算をすれば良く，アインシュタ

イン計量を具体的に求める必要はない．

実は佐々木版の“二木不変量”も Reeb ベクトル場を決めれば決まるもので，実は上記の体積汎関数の最小点において佐々木版二木不変量は 0 になる．より詳しく言うと，体積汎関数の第 1 変分が佐々木版二木不変量そのものになる．この体積汎関数の最小点を与える Reeb ベクトル場のとき，ちょうど研究中であった Kähler–Ricci soliton の存在定理はその Reeb ベクトル場に対し，佐々木・アインシュタイン計量の存在を与える．

以上が，筆者が佐々木多様体の研究に至った経緯である．ここまでは，できるだけ記号や数式を用いない説明を試みたが，ある程度の知識を持つ読者にはそのためむしろわかりにくかったかもしれないので，以下でもう少し正確な佐々木多様体の説明を記号を使いながらする．

2. ケーラー幾何と佐々木幾何

ケーラー多様体においては複素構造 J，J–不変シンプレクティック形式 ω，J–不変リーマン計量 g があり，任意のベクトル場 X，Y に対し

$$\omega(X,Y) = g(JX,Y) \tag{1}$$

が成立している．この式から，J, ω, g のうちの 2 つが与えられると残りの 1 つが決まることがわかる．ケーラー多様体の定義を正確に言うと，複素多様体 M の複素構造を J とし，J–不変な g が与えられたとき，3 つ組 (M, J, g) がケーラー多様体であるとは式 (1) により定まる ω が閉形式であるときを言う．

佐々木多様体においては，CR–構造，接触形式 η，リーマン計量 g がある．1–形式としての η は g に関し長さが 1 で，これが接触形式とは η の核 $\mathrm{Ker}\,\eta$ 上 $d\eta$ は非退化になっていることを意味する．この説明からわかるように，接触多様体は奇数次元でなければならない．以下，佐々木多様体は常に $(2m+1)$–次元であるとする．するとこの非退化性は，至る所

$$\eta \wedge (d\eta)^m \neq 0$$

であることと同値である．一般に CR–構造とは余次元 1 の分布に与えられた複素構造 J を言う．佐々木多様体においてはこの分布が $\mathrm{Ker}\,\eta$ になっている．よって $\mathrm{Ker}\,\eta$ は CR–構造から定まる複素構造 J で不変になっている．さらに佐々木多様体においては $d\eta$ は $\mathrm{Ker}\,\eta$ 上 J–不変になっている．しかも $\mathrm{Ker}\,\eta$ 上，リーマン計量 g と $\frac{1}{2}d\eta$ は

$$\frac{1}{2}d\eta(X,Y) = g(JX,Y) \tag{2}$$

の関係をみたす．すなわち，式 (1) と (2) を比較すればわかるように，$\frac{1}{2}d\eta(X,Y)$ が g を $\mathrm{Ker}\,\eta$ に制限したときのケーラー形式に当たるものになっている．このことが，「佐々木構造はケーラー構造の奇数次元類似物」と謂われる由縁である．接触形式に対する **Reeb ベクトル場** ξ は

$$i(\xi)\eta = 1, \quad i(\xi)d\eta = 0 \tag{3}$$

をみたすベクトル場として一意的に定まるものである．リーマン計量 g に関し，ξ は長さ 1 の Killing ベクトル場である．すなわち，ξ の生成する流れは g の等長変換である．この流れの局所的軌道空間には式 (2) から自然にケーラー計量が定まる．

以上は，佐々木多様体の持つ性質をかいつまんであげたが，これが佐々木多様体の定義になっているわけではない．佐々木多様体の正確な定義には色々な述べ方がある．CR–構造を用いた述べ方もあるがそれについては文献 4)，Definition 6.5.13 を見よ．佐々木多様体の定義として現在よく用いられるのは次の定義である．

定義 2.1 リーマン多様体 (S, g) に対してその錐多様体 $(\mathbf{R}_+ \times S, dr^2 + r^2 g)$ を $(C(S), \bar{g})$ と書くことにする．錐多様体 $(C(S), \bar{g})$ がケーラー多様体となるとき，リーマン多様体 (S, g) は**佐々木多様体**であると言う．

したがって佐々木多様体は奇数次元である．また，$(\{r=1\} \subset C(S), \bar{g}|\{r=1\})$ は (S, g) と等長的であるので，S は $\{r=1\}$ と同一視される．上述の佐々木多様体の性質はこの定義からすべて導かれる．定義 2.1 から $(C(S), \bar{g}, J)$ がケーラー多様体となるような複素構造 J が存在する．$C(S)$ 上

のベクトル場 $\widetilde{\xi}$ および 1–形式 $\widetilde{\eta}$ を

$$\widetilde{\xi} = Jr\frac{\partial}{\partial r},\ \ \widetilde{\eta} = \frac{1}{r^2}\bar{g}(\widetilde{\xi},\cdot) = \sqrt{-1}(\bar{\partial}-\partial)\log r$$

により定義する．これらをさらに $\{r = 1\} = S$ に制限したもの $\xi = \widetilde{\xi}|_S$, $\eta = \widetilde{\eta}|_S$ は S 上のベクトル場および 1–形式を与え，これらを **Reeb ベクトル場**，**接触形式**と呼ぶ．これらが，上述の性質をみたすのである．要は錐多様体 $C(S)$ のケーラー構造から CR–構造，接触構造，リーマン構造およびその間の関係は導かれるのである．

一方，もう一つの重要なケーラー構造がある．ベクトル場 $\widetilde{\xi}$ は $(C(S),\bar{g})$ 上の Killing ベクトル場であり，$\widetilde{\xi}-\sqrt{-1}J\widetilde{\xi}$ は $(C(S),J)$ 上正則である．Reeb ベクトル場 ξ が S に定める flow の局所軌道空間は，$\widetilde{\xi}-\sqrt{-1}J\widetilde{\xi}$ が $C(S)$ 上の S の近傍で定める複素 1 次元正則 flow の局所軌道空間と一致する．従って前者は後者の持つ性質を受け継ぎ，ξ の生成する S の flow は横断的正則構造を持つ．すなわち，局所軌道空間は正則構造を持ち，局所的な貼り合わせに伴う変換は正則である．しかも，Ker η 上，リーマン計量 g と $\frac{1}{2}d\eta$ は式 (2) の関係にあることを用いると，局所軌道空間には，ケーラー計量 g^T でそのケーラー形式 ω^T は S に引き戻すと $\frac{1}{2}d\eta$ に一致するものが存在する．この局所軌道空間のケーラー構造を横断ケーラー構造と呼び，$\frac{1}{2}d\eta$ を横断ケーラー形式と言い，ω^T と同一視することにする：

$$\omega^T := \frac{1}{2}d\eta. \tag{4}$$

佐々木多様体 S の幾何は錐多様体 $C(S)$ のケーラー構造および，局所軌道空間のケーラー構造に挟まれた幾何学と言える．Boyer–Galicki はこれを**ケーラー・サンドイッチ**と呼んでいる．奇数次元実多様体である S の正則ベクトル場とは, $C(S)$ の正則ベクトル場で $\widetilde{\xi}$ と可換なものと定義できる．これは $\widetilde{\xi}-\sqrt{-1}J\widetilde{\xi}$ と可換なものと言っても同じである．このようなベクトル場の実部は S の flow を生成し，さらに Reeb ベクトル場の局所軌道空間の正則な local flow を生成する．佐々木版二木不変量はこのようにして定義される S の正則ベクトル場全体のなすリー環の指標として定義される．

佐々木多様体の典型例は奇数次元球面である．これは $\mathbf{C}^{m+1}$ の中に

$$\{(z_1,\ldots,z_{m+1}) \in \mathbf{C}^{m+1} :$$
$$|z_1|^2 + \ldots + |z_{m+1}|^2 = 1\}$$

という形で実現でき，これの錐は $\mathbf{C}^{m+1}-\{\boldsymbol{o}\}$ であり，その標準的計量がケーラー計量であるからである．Reeb ベクトル場は S^1-作用

$$(z_1,\ldots,z_{m+1}) \mapsto (e^{i\theta}z_1,\ldots,e^{i\theta}z_{m+1})$$

を誘導するので，その局所軌道空間は大域的軌道空間としての複素射影空間 $\mathbf{CP}^m$ となる．もちろん複素射影空は Fubini–Study 計量に関しケーラー多様体である．

この例において，奇数次元球面はアインシュタイン多様体である．また，これの錐 $\mathbf{C}^{m+1}-\{\boldsymbol{o}\}$ は Ricci 平坦ケーラー多様体であり，軌道空間である複素射影空間 $\mathbf{CP}^m$ は正のケーラー・アインシュタイン多様体である．実はこのことは一般的に成立する：

命題 2.2 コンパクト佐々木多様体 S に対し，次は同値である．

(1) S はアインシュタイン多様体である．

(2) $C(S)$ は Ricci 平坦ケーラー多様体である．

(3) 各局所軌道空間は正のケーラー・アインシュタイン多様体である．

コンパクト佐々木多様体が与えられ，Reeb ベクトル場を一つ与えたとき，その Reeb ベクトル場を共有するような佐々木計量全体の中に，命題 2.2 に述べられた 3 つの条件をみたすもの，つまり佐々木・アインシュタイン計量が存在するかを考えよう．佐々木版二木不変量はそのような計量が存在するための障害になっている．Reeb ベクトル場を変えないように計量を変形するというのは

$$\omega^T \mapsto \omega^T + i\partial\bar{\partial}\varphi$$

の形の変形を軌道空間で考えることと同じであることがわかる．このような変形はカラビ・ヤウ計量の存在の証明がなされたときから用いられた変

形で，ケーラー・アインシュタイン計量をこの変形で求めることはモンジュ・アンペール型非線形偏微分方程式を φ について解くことに帰着される．もちろん，ケーラー幾何では，このような研究は以前から深く研究されている．従って，ケーラー幾何の成果を佐々木多様体の横断ケーラー幾何として応用すれば，同じ程度に深い結果が得られるはずである．ただ，佐々木多様体の横断ケーラー幾何は局所的なケーラー幾何の集まりであって，大域的な幾何ではないので，大域的な情報をどう得るかが問題となる．これは多くの場合，錐多様体 $C(S)$ のケーラー幾何が必要な情報を提供してくれる．

3. トーリック佐々木多様体

さてケーラー幾何で得られたもっとも強力な結果の一つに X.-J. Wang と X.-H. Zhu による次の結果がある．

定理 3.1 (Wang–Zhu[14]) トーリック Fano 多様体 M には Kähler–Ricci soliton が存在する．従って特に，トーリック Fano 多様体 M がケーラー・アインシュタイン計量を持つための必要十分条件は二木不変量が 0 であることである．

Kähler–Ricci soliton とは，ケーラー計量 g と正則ベクトル場 X で

$$\mathrm{Ric}(g) - \gamma g = \mathcal{L}_X g$$

をみたすものである．今の場合，Fano 多様体を考えているので $\gamma = 1$ としてよい．$X = 0$ の場合はケーラー・アインシュタイン計量である．

そこで，佐々木多様体がトーリックであるということを次のように定義しよう．

定義 3.2 佐々木多様体 S は錐多様体 $C(S)$ がトーリック Kähler 多様体であるとき，**トーリック佐々木多様体**と言う．

この定義の下に次を証明できる：

定理 3.3[7] トーリック佐々木多様体 S において $K_{C(S)}^{\otimes l}$ がある正の整数 l に対し自明であるとする．このとき S には横断的 Kähler–Ricci soliton が存在する．

ここに，横断的 Kähler–Ricci soliton とは局所軌道空間上で Kähler–Ricci soliton となるような佐々木計量である．これは，

$$\omega^T \mapsto \omega^T + i\partial\bar{\partial}\varphi$$

の形で Reeb ベクトル場を変えないように計量を変形し Kähler–Ricci soliton を得る方法を用いる．これはモンジュ・アンペール方程式の解の存在を示すことに帰着される．

次に，Reeb ベクトル場を動かして，その Reeb ベクトル場に対する二木不変量が 0 になるようにできることを見よう．この議論は文献 11) で Martelli–Sparks–Yau が与えたものである．仮定により $C(S)$ はトーリックであるから $(m+1)$–次元トーラス T^{m+1} が効果的に作用している．$Lie(T^{m+1})$ により T^{m+1} のリー環を表し，$\mu : C(S) \to Lie(T^{m+1})^*$ をモーメント写像，$\mathcal{C}$ をその像とする．すると $\mathcal{C}$ は凸多面体上の錐になっており，適当な $\lambda_i \in Lie(T^{m+1})$ を用いて

$$\mathcal{C} = \{y \in Lie(T^{m+1})^* | \langle \lambda_i, y \rangle \geq 0, i = 1, \ldots, d\}$$

の形に表される．

命題 3.4 トーリック佐々木多様体 S に対し次の 3 つは同値である．

(1) $K_{C(S)}^{\otimes l}$ は自明．

(2) $Lie(T^{m+1}) \cong \mathbf{R}^{m+1}$ と同一視したとき，$SL(m+1, \mathbf{R})$ の変換で

$$\lambda_i = (l, a_2, \ldots, a_{m+1})$$

の形に移せる（このとき，高さ l のトーリック・ダイアグラムであると言う）．

(3) 錐多様体 $C(S)$ の頂点は $\mathbf{Q}$–Gorenstein 特異点である．

この命題の条件は佐々木・アインシュタイン計量が存在するための必要条件であることは容易に示

される．この命題で述べられる条件をみたすトーリック佐々木多様体 S に対し，佐々木版二木不変量が 0 になるような Reeb ベクトル場が存在することを以下で解説する．従ってその結果として，この命題の条件は佐々木・アインシュタイン計量が存在するための必要十分条件となる．

以下，簡単のため $l=1$ とし，上の命題のように $Lie(T^{m+1}) \cong \mathbf{R}^{m+1}$ と同一視されているとする．また，$\boldsymbol{e}_1=(1,0,\ldots,0)$ とする．$\mathrm{Ric}_g=2mg$ となるアインシュタイン計量は Hilbert–Einstein 汎関数

$$I(g)=\int_S(\sigma(g)-2m(2m+1))dV_g$$

の臨界点である．ただし $\sigma(g)$ はリーマン計量 g のスカラー曲率である．佐々木多様体に対してはこの汎関数は Reeb ベクトル場 ξ にしか依存しない．実際 $I(g)$ は

$$I(\xi)=8m(m+1)(2\pi)^{m+1}(\langle\xi,\boldsymbol{e}_1\rangle-m)\mathrm{vol}(\Delta(\xi))$$

に等しい，ただし $\mathrm{vol}(\Delta(\xi))$ は $\Delta(\xi):=\mu(\{r\le 1\})$ の体積である．$I(\xi)$ の ξ 方向への変分が 0 になるための条件は $\langle\xi,\boldsymbol{e}_1\rangle=m+1$ であることが容易にわかる．

$$P=\{\xi\in Lie(T^{m+1})\cong\mathbf{R}^{m+1}|\langle\xi,\boldsymbol{e}_1\rangle=m+1\}$$

とおき，I を P に制限して臨界点を調べれば良い．

$$I|_{\mathrm{Int}P}=8m(m+1)(2\pi)^{m+1}\mathrm{vol}(\Delta(\xi))$$

となる．$\mathrm{vol}(\Delta(\xi))$ は $\xi\in\mathrm{Int}P$ に対し固有な強凸関数であることがわかるので，唯一の最小値を持つ．この最小値を取る Reeb ベクトル場 ξ に対し，佐々木版二木不変量は 0 になる．

従って，この ξ に対する横断 Kähler–Ricci soliton は横断 Kähler–Einstein 計量になり，従って佐々木・アインシュタイン計量になる．この $\mathrm{vol}(\Delta(\xi))$ を最小にする ξ を見つける AdS 側の操作は CFT 側では a–maximaization という操作に対応する．両者は計算により，同じ値をとることが確認されていて，従って AdS/CFT 対応の確かさが確認されたことになる．

参考文献

1) Ch. Bär: Real Killing spinors and holonomy, *Comm. Math. Phys.* **154**, no.3, 509–521 (1993).

2) C.P. Boyer and K. Galicki: The twistor space of a 3-Sasakian manifold, *Internat. J. Math.* **8**, no.1, 31–60 (1997).

3) C.P. Boyer and K. Galicki: 3-Sasakian manifolds, Surveys in differential geometry: essays on Einstein manifolds, *Surv. Differ. Geom.*, VI, Int. Press, Boston, MA, pp.123–184 (1999).

4) C.P. Boyer and K. Galicki: Sasakian Geometry, *Oxford Mathematical Monographs*, Oxford University Press, Oxford (2007).

5) K. Cho, A. Futaki and H. Ono: Uniqueness and examples of toric Sasaki-Einstein manifolds, *Comm. Math. Phys.*, **277**, 439–458 (2008).

6) A. Futaki: An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics, *Invent. Math.* **73**, 437–443 (1983).

7) A. Futaki, H. Ono and G. Wang: Transverse Kähler geometry of Sasaki manifolds and toric Sasaki-Einstein manifolds, *Journal of Differential Geometry*, **83**, 585–636 (2009).

8) J.P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks and W. Waldram, *Sasaki-Einstein metrics on* $S^2\times S^3$, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **8**, 711–734 (2004).

9) J.P. Gauntlett, D. Martelli, J. Sparks and W. Waldram, *A new infinite class of Sasaki-Einstein manifolds*, 2004, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **8**, 987–1000 (2004).

10) D. Martelli, J. Sparks and S.-T. Yau: The geometric dual of a-maximisation for toric Sasaki-Einstein manifolds, *Commun. Math. Phys.* **268**, 39–65 (2006).

11) D. Martelli, J. Sparks and S.-T. Yau: Sasaki-Einstein manifolds and volume minimisation, *Comm. Math. Phys.* **280**, no.3, 611–673 (2008).

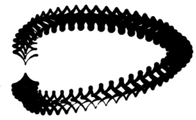
12) S. Sasaki: On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. *I, Tohoku Math. J.* **(2) 12**, 459–476 (1960).

13) S. Sasaki and Y. Hatakeyama, On differentiable manifolds with contact metric structures, *J. Math. Soc. Japan* **14**, 249–271 (1962).

14) X.-J. Wang and X. Zhu: Kähler-Ricci solitons on toric manifolds with positive first Chern class, *Adv. Math.* **188**, no.1, 87–103 (2004).

（ふたき・あきと，東京工業大学大学院理工学研究科）

超対称性と複素多様体



新田 宗土

1. はじめに

超対称性とは現代の素粒子物理学で考え出され，統一理論として最も有望視されているアイデアである．しかし，ここではそのような側面ではなくて数理的な側面について考えたい．通常の対称性は，時空対称性と内部対称性に分類される．時空対称性は空間や時間を変換させる空間回転やローレンツ変換，あるいは並進も合わせたポアンカレ対称性などである．他方，内部対称性は，同種の「場」を混ぜ合わせる変換である．ゲージ対称性も，この内部対称性の一種である．これに対して超対称性はボソン場とフェルミオン場を入れ替える対称性であり，必然的に時空対称性も含んでいる．考え得る最も大きな対称性で，正に通常の対称性を「超えた」対称性である．本稿では，この超対称性と複素多様体という一見全く異なる対象が，密接に関係していること，あるいは，一対一に対応しているということを解説したい．

2. 非線形シグマ模型

超対称性の解説に行く前に，ここでまず**非線形シグマ模型**と呼ばれる，スカラー場の理論について述べておきたい．n 個のスカラー場を $\phi^i(x)$ $(i=1,\cdots,n)$ と書くと，非線形シグマ模型のラグランジアンは

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}g_{ij}(\phi)\partial_\mu\phi^i\partial^\mu\phi^j \qquad (1)$$

と書かれる．ここで，$g_{ij}(\phi)$ は $n\times n$ の行列でスカラー場の関数であるが，ターゲット空間と呼ばれる空間の計量とみなすことができる．つまり，この模型は時空からターゲット空間 M への写像を与えている．

このような模型は元々，自発的対称性の破れから出てきた．系がある（大域的）対称性を持っているにも関わらず，基底状態はその対称性を持っていない場合がある．このとき，自発的に対称性が破れたという．そして対称性の破れた次元の数だけ，ゼロ質量のスカラー粒子が現れることが，**南部・ゴールドストーンの定理**によって保証されている．これは**南部・ゴールドストーン粒子**と呼ばれ，素粒子論でも物性論でも頻繁に現れる．パイ中間子が，カイラル対称性の自発的対称性の破れにともなうゼロ質量粒子とみなせるということに気付いたのが，ノーベル賞受賞者・南部陽一郎先生である．この場合は，カイラル対称性が $SU(2)_{\rm L}\times SU(2)_{\rm R}$ で，基底状態の対称性が $SU(2)_{\rm V}$ である．このとき，$6-3=3$ 個のゼロ質量粒子が現れ，それがパイオンである．

もっと一般に，系の持っている対称性（リー群）G が，部分群 H に破れたとしよう．この場合はターゲット空間は G/H という商空間になり，式 (1) の g_{ij} は，この商空間の G 不変な計量となる（そのような計量を持った空間を等質空間という）．一般に

基底状態の対称性 H の変換は，スカラー場 ϕ^i に対して線形な変換をするが，系の対称性 G はターゲット空間の一般座標変換になっており，ϕ^i に対し非線形な変換をする．このようなことから，非線形表現と呼ばれている．上のカイラル対称性の破れの場合は，$G/H = SU(2)_{\rm L} \times SU(2)_{\rm R}/SU(2)_{\rm V} \simeq SU(2)$ となっている．特に，このようにターゲット空間が群多様体の場合には，プリンシパル・カイラル模型と呼ばれている．

ここまでは，時空の次元が4次元（空間3次元）の場合を念頭においていた．時空次元が低い場合，例えば2次元の場合も同じであろうか．実は，素粒子論や物性理論でよく知られているのであるが，コールマン・マーミン・ワグナーの定理によって，低次元では，ゼロ質量粒子の存在が禁止されている．よって対称性は自発的に破れない．これにより，いかなる G/H の非線形シグマ模型においても，量子効果によって質量ギャップがダイナミカルに生じる．

ただし，共形対称性がある場合は例外で，ターゲット空間のリッチ曲率がゼロ（リッチ平坦条件）の場合である．この場合，弦理論のシグマ模型アプローチになっており，2次元時空は弦の世界面とみなせて，スカラー場は，この世界面のターゲット空間への埋め込みを表している．

3. 超対称非線形シグマ模型と複素多様体

まず，超対称性にはその数が存在する．一つのボソン場に対して一つのフェルミオンを対応させる場合は，最小の超対称性，複数のフェルミオンを対応させる場合は，拡張された超対称性と呼ぶ．対応させる数を，通常 $\mathcal{N}$ で表す．最小の超対称性の数は時空の次元に寄っている．

超対称性の数は，ターゲット空間の複素構造の数に関係している．4次元時空（3次元空間 + 1次元時間）のとき，$\mathcal{N}=1$ の場合ターゲット空間は**ケーラー（Kähler）多様体**，$\mathcal{N}=2$ の場合は**ハイパーケーラー（hyper-Kähler）多様体**とならなければならない．超対称性と複素多様体の関係を表1にまとめた．

表1　超対称性と複素多様体．

複素多様体	超電荷	4次元	2次元
リーマン	2		$\mathcal{N}=(1,1)$
ケーラー	4	$\mathcal{N}=1$	$\mathcal{N}=(2,2)$
ハイパーケーラー	8	$\mathcal{N}=2$	$\mathcal{N}=(4,4)$

具体的に4次元 $\mathcal{N}=1$ の場合から始めよう．フェルミオン場を省略して，ラグランジアンのボソン場の部分を書くと

$$\mathcal{L}_{\rm boson} = g_{ij^*}(\varphi, \varphi^*)\partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^j \tag{2}$$

という形をしている[1,2]．ここで，$\varphi^i(x)$ は複素スカラー場，g_{ij^*} はエルミート計量で，次のケーラー条件を満たしている．

$$\frac{\partial g_{ij^*}}{\partial \varphi^k} = \frac{\partial g_{kj^*}}{\partial \varphi^i}, \quad \frac{\partial g_{ij^*}}{\partial \varphi^{*k}} = \frac{\partial g_{ik^*}}{\partial \varphi^{*j}}. \tag{3}$$

この条件を可積分条件とし，ケーラー計量は局所的にケーラーポテンシャルと呼ばれるスカラー量 $K(\varphi, \varphi^*)$ を用いて

$$g_{ij}(\varphi, \varphi^*) = \frac{\partial^2 K(\varphi, \varphi^*)}{\partial \varphi^i \partial \varphi^{*j}} \tag{4}$$

のように書くことができる．

では，なぜこうならなければならないのであろうか？ まず，スカラー場が複素場であるということは，4次元の最小のフェルミオンが基本的に複素場であることに関係している．それは，ワイル・フェルミオンという複素2成分のフェルミオンである．超対称理論では，ボソンとフェルミオンが一対一に対応しているので，スカラー場は複素場でなければならない．では，なぜ単なる複素多様体ではなくてケーラー多様体でなければならないのであろうか？超対称理論では，スカラー場はカイラル多重項と呼ばれる種類の**超多重項**に入っている．超多重項とは，スカラー場とフェルミオン場をまとめたものと思ってもらえばよい．この超多重項というものは，普通の時空（座標 x^μ）に，フェルミオン的な座標（グラスマン座標という）θ を加えた**超空間** (x^μ, θ) と呼ばれる空間の上の場（**超場**という）$\Phi(x,\theta)$ だと解釈することができる．これはグラスマン座標で展開すると $\Phi(x,\theta) = \varphi(x) + \theta\psi(x) + \theta^2 F(x)$

となる．ここで，$\psi(x)$ はワイル・フェルミオン場で，$F(x)$ はダイナミカルな自由度を持たない補助場である．詳しいことを知りたい読者は，教科書[3]を参照してもらうことにして，最終的にラグランジアンは式 (4) のケーラー・ポテンシャルを用いて，

$$\mathcal{L} = \int d^4\theta K(\Phi, \Phi^\dagger) \tag{5}$$

という非常に単純な形で書ける．この θ 積分を実行して補助場 F を消去すると，ボソン場に関しては，式 (2) が現れ，フェルミオン場もすべてを含んだラグランジアンが得られる．すなわち，ラグランジアンが，補助的な役割しかないと思われていたケーラー・ポテンシャルで直接書けてしまい，ケーラー条件は自動的に満たされてしまうのである．

超対称理論で大域的対称性が自発的に破れた場合，ターゲット空間はどのようになるのであろうか．これは，物理学的には超対称な非線形表現を構成せよという問題であり，数学的にはアイソメトリー G とイソトロピー H を持つケーラー多様体を構成せよという問題である．この問題は実はかなり非自明である．例えば，G/H の次元が奇数である場合は，ケーラー多様体にはなれないので，どうすればよいのであろうか．この問題に一般的な解答を与えたのが，ノーベル賞受賞者・益川敏英先生の知られざる名作である[4]．超対称理論で対称性が自発的に破れた際に，一般には，南部・ゴールドストーン粒子以外に，余分なゼロ質量粒子，**偽南部・ゴールドストーン粒子**が現れる[*1]．なぜならば，対称性の破れは一般的にポテンシャルによって引き起こされるが，超対称理論ではポテンシャルがスーパーポテンシャル W というものを用いて，

$$V = g^{ij^*} \frac{\partial W}{\partial \varphi^i} \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi^j} \right)^* \tag{6}$$

と表されるからだ．ここで，W が正則関数であることから，基底状態の条件が $\frac{\partial W}{\partial \varphi^i} = 0$ という，正則な方程式となっていることから，対称性が G の複素化 $G^{\mathbf{C}}$ にまで拡大していることが重要である．この $G^{\mathbf{C}}$ が基底状態で自発的に破れるので，一般には G の破れよりも多くのゼロ質量粒子を予言し，その余分なものが偽南部・ゴールドストーン粒子である．特に，G/H の次元が奇数の場合は，必ず現れないといけない．また，大域的対称性のみが破れる場合は，必ず最低 1 個の偽南部・ゴールドストーン粒子が現れなければならないということを証明できる．そして，南部・ゴールドストーン粒子と偽南部・ゴールドストーン粒子の全体が張る空間がケーラー多様体になっていればよいのである．筆者は，大学院生の頃，この益川先生の理論の習得に学生生活の大半を費やしたという思い出がある．

4 次元の超対称非線形シグマ模型を 2 次元に次元簡約すると，2 次元の $\mathcal{N} = (2,2)$ の超対称性を持った非線形シグマ模型が得られる．ここで，2 次元のフェルミオンはマヨラナ条件とともにワイル条件を課すことでできるので，最小のフェルミオンは $(1,0)$ と書くことができ，4 次元の $\mathcal{N} = 1$ は 4 つの超電荷を持っていたことに対応し，$\mathcal{N} = (2,2)$ となる．前節で述べたように 2 次元のシグマ模型は弦理論の模型にもなっている．この場合は，特にリッチ平坦条件からターゲット空間はリッチ平坦なケーラー多様体，すなわち**カラビ・ヤウ多様体**になっていなければならない．カラビ・ヤウ多様体は，計量の存在は数学者カラビやヤウの定理によって保証されているが，具体的な計量自体は求めることは難しい．コンパクトな場合は今まで解析解は求められておらず，数値解くらいしか求められていないようだ．ただし，非コンパクトな場合は例がいくつも作れ，代表的な例としてコニフォルドのステンツェル計量が知られている．筆者も 10 年前，超対称非線形表現の理論を応用して，コンパクト等質空間に一つ次元を足して非コンパクトにした場合に構成したことがある．

*1) 余談であるが，ここでの「偽」は，英語では “quasi” である．これとは別に “pseudo” 南部・ゴールドストーン粒子というものもあり区別をしなければならない．後者は，対称性が陽に破れている場合に，小さな質量を得た南部・ゴールドストーン粒子である．しかし，超対称理論に現れるほうを “pseudo” と呼んだ時期もあってややこしいので注意が必要だ．

4. 超対称非線形シグマ模型と複素多様体：拡張された超対称性

次に拡張された超対称性の場合に話を移そう．4次元において $\mathcal{N}=2$ の拡張された対称性がある場合，スカラー場はハイパー多重項という超多重項に属している．一つのハイパー多重項に2つの複素スカラー場が属している．よって，n 個ハイパー多重項があると実次元で $4n$ 個のスカラー場が存在する．この $4n$ 個のスカラー場が張る空間がハイパーケーラー多様体である[5)]．模型を複素スカラー場で書いた場合，一つの複素構造 I ($I^2=-\mathbf{1}$ を満たす (1,1) テンソル）は明白になっており $\mathcal{N}=1$ の超対称性の存在は自明である．さらに，余分な超対称性変換があると，複素スカラー場の間の正則でない変換が必ず存在しており，これが他の複素構造 J を与えている．さらに，I と J を掛け合わせることで，3つ目の複素構造 K を構成でき，これらは

$$IJ=K, \quad JK=I, \quad KI=J \tag{7}$$

という関係を満たしている．

ハイパーケーラー多様体の最も基本的な例は江口・ハンソン空間であろう．これは，複素射影空間 $\mathbf{C}P^1$ の余接空間 $T^*\mathbf{C}P^1$ の上の計量で，重力インスタントンの最も簡単な例になっている．その他の重力インスタントンもすべて実4次元ハイパーケーラー多様体の例である．他に，任意のケーラー多様体 M の余接空間 T^*M にもハイパーケーラー計量が少なくとも局所的に入れられることが知られている．

筆者が修士の学生であった頃，指導教官の東島清先生に益川先生の理論[4)]を $\mathcal{N}=2$ 超対称性がある場合に拡張しなさいという課題を与えられた．これは本来，修士論文のテーマであったが，$\mathcal{N}=2$ の理論の自発的対称性の破れの際の偽南部・ゴールドストーン粒子の出現の仕方の一般論の構築は非常に難しく，修士課程を終わっても博士課程を終わっても解くことはできず，未だにその問題への解答は与えることができていない．これは数学的にはアイソメトリーを持ったハイパーケーラー多様体を分類し，その計量を構成しなさいという問題になっている．残りの人生をかけて，いつかは解かなければならない，過大な課題である．

また，ゲージ場の属しているベクトル多重項にも，複素スカラー場が含まれていて，**スペシャル・ケーラー多様体**と呼ばれている．これは，サイバーグ・ウィッテン理論で活躍した．

5. ケーラー商，ハイパーケーラー商

ここまでは，ボソン場としてはスカラー場のみの理論を考えていた．ここでは，ゲージ場との相互作用を考えよう．ターゲット空間 M にアイソメトリーが存在する場合，ゲージ場と結合させることによって，その方向をゲージ化することができる．ここでは，ゲージ場の作用が固定点を持たない場合（自由な作用と呼ぶ）を考えよう．ゲージ化するアイソメトリーはキリング・ベクトル k_a^i $(a=1,\cdots,\dim G)$ に対応するが，これはキリング・ポテンシャルと呼ばれる量 D^a を用いて，$k_a^i=-ig^{ij^*}\frac{\partial D^a}{\partial\varphi^{*j}}$ と書ける．ゲージ化により必ずポテンシャル項が現れ，キリングポテンシャルを用いて，

$$V=\frac{1}{2}g^2\sum_a(D^a)^2 \tag{8}$$

と書ける．ここで，g はゲージ結合定数である．D^a は超対称理論においては **D 項**と呼ばれているが，数学では**モーメント写像**と呼ばれているもので，よく μ^a と書かれる．特に，理論が非線形ではなくて単純な線形なスカラー場であれば，D 項はゲージ群の生成子 T_a を用いて

$$D^a=\vec{\varphi}^\dagger T_a\vec{\varphi} \tag{9}$$

となり，ゲージ化された線形シグマ模型という．

この理論の物理的な基底状態は $V=0$ で表される空間をゲージ対称性で同一視した空間，**真空のモジュライ空間**となる．

$$\mathcal{M}\simeq\{\varphi^i|D^a=0\}/G. \tag{10}$$

この操作を**ケーラー商**（**Kähler quotient**）と呼

ぶ．これは，解析力学におけるシンプレクティック商の拡張になっている．$\mathcal{M}$ は元のターゲット空間 M より次元が $2\dim G$ だけ低くなっている．このことからもわかるように，空間 $\mathcal{M}$ は再びケーラー多様体である．

次に $\mathcal{N}=2$ の超対称性がある場合に話を移そう．$\mathcal{N}=2$ の場合に同様に拡張したものが，**ハイパーケーラー商（hyper-Kähler quotient）**である．これは，$\mathcal{N}=2$ 超対称非線形シグマ模型において最初に発見されたのだが[6]，その後，数学者ヒッチンが加わり数学的に整備したため[7]，数学者の間では後者の論文が最初だと認識されているようである．複素スカラー場 (φ^i,χ^i) の組で一つのハイパー多重項を構成するとする $(i=1,\cdots,n)$．ハイパーケーラーの場合は，D 項に加えて，正則な関数 $F^a(\varphi,\chi)$ で書かれる F 項が加わり，ポテンシャルは

$$V=\frac{1}{2}g^2\sum_a[(D^a)^2+|F^a|^2] \qquad (11)$$

となる．よって，真空のモジュライ空間は

$$\mathcal{M}\simeq\{(\varphi^i,\chi^i)|D^a=F^a=0\}/G \qquad (12)$$

となり，これをハイパーケーラー商と呼ぶ．また，$\mathcal{M}$ の次元は M の次元よりも $4\dim G$ だけ低くなっており，$\mathcal{M}$ もハイパーケーラー多様体である．特に，M が平坦な空間の場合は，

$$D^a=\vec{\varphi}^\dagger T_a\vec{\varphi}-\vec{\chi}^\dagger T_a\vec{\chi},\quad F^a=\vec{\chi}^T T_a\vec{\varphi} \qquad (13)$$

と書ける．知られているほとんどのハイパーケーラー多様体は，平坦な空間のハイパーケーラー商として表されている．

6. ソリトン・インスタントンとそのモジュライ空間

ここでは，表 2 のように，ゲージ理論のソリトンやインスタントンと複素多様体の関係について触れることにしよう．紙面の都合から，インスタントンとボーテックスについて触れるが，詳しくは教科書[8]を参照するとよい．4 次元のヤン・ミルズ理論にはよく知られたようにインスタントンと

表 2　ソリトン・インスタントンのモジュライ空間．

種類	次元	超電荷	モジュライ空間
インスタントン	4	8	ハイパーケーラー
モノポール	3	8	ハイパーケーラー
ボーテックス	2	4	ケーラー
ドメイン壁	1	4	ケーラー

呼ばれる（反）自己双対接続

$$F_{\mu\nu}=\pm\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \qquad (14)$$

が存在する．ここで，$F_{\mu\nu}$ はゲージ場の強さで，時間方向はユークリッド化してある．インスタントンの数 k は，第 2 チャーン数

$$\int \mathrm{tr}\,(F\wedge F)=8\pi^2 k \qquad (15)$$

で計算できるトポロジカルな量である．ここで，$F=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu\wedge dx^\nu$ は場の強さの 2 形式である．数学者たちアティヤー・ドリンフェルト・ヒッチン・マニンによる有名な構成法によると，k インスタントンのモジュライ空間は，

$$\begin{aligned}&[A,A^\dagger]-[B,B^\dagger]+I^\dagger I-JJ^\dagger=\theta,\\&IJ=0\end{aligned} \qquad (16)$$

を $U(k)$ で割ったハイパーケーラー商で書ける．ここで，A,B は $k\times k$，I,J^T は $N\times k$ の複素行列である．これらは，平坦空間の D 項，F 項条件 (13) であることに注意しよう．また，θ は $\mathbf{R}^4$ を，こっそり非可換空間に拡張した際の非可換パラメーターであるが，詳細は省く．

ところで，インスタントンのモジュライ空間は，一体なぜハイパーケーラー多様体なのだろうか？数学的には何らかの難しい理由でそうなっているようだが，物理学的には超対称性から簡単に証明される．インスタントンは，5 次元の（16 個の超電荷を持った）超対称性なゲージ理論における粒子的なソリトンとみなすことができ，インスタントン方程式 (14) は，BPS 方程式と呼ばれる方程式と解釈できる．インスタントン粒子は，本来の超対称性の半分だけを保ち，半分だけを破る BPS 状態と呼ばれる状態である．そのため，インスタントンの運動を記述する有効理論には，8 個の超

電荷を持った1次元の非線形シグマ模型で記述でき，そのターゲット空間は，まさにハイパーケーラーである．

次にボーテックスの話に移ろう．ボーテックスは，最初はアーベリアン・ヒッグス模型で知られていた．これは超伝導体で見つかる渦糸磁束である．最近は，非アーベリアンゲージ理論への拡張が見つかっており，非アーベリアン・ボーテックスと呼ばれている[9]．$U(N)$ ゲージ理論の場合のBPSボーテックス方程式は，2つの $N \times N$ の行列方程式

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{g^2}{2}(HH^\dagger - v^2\mathbf{1}_N), \\ 0 &= (D_1 + iD_2)H \end{aligned} \tag{17}$$

で与えられる．ここで，H は $N \times N$ のヒッグス・スカラー場で，g はゲージ結合定数，v はヒッグス場の真空期待値である．インスタントンの場合と同様に，ボーテックスの数 k は，第1チャーン数

$$\int \mathrm{tr}\, F = 2\pi v^2 k. \tag{18}$$

で計算されるトポロジカルな量である．ボーテックス方程式 (17) は，4次元の $\mathcal{N}=2$ の超対称理論のBPS方程式になっている．このためにモジュライ空間はケーラー多様体である．k ボーテックスのモジュライ空間は，D項条件

$$[Z, Z^\dagger] + \psi^\dagger\psi = \frac{2\pi}{g^2} \tag{19}$$

を $U(k)$ で割ったケーラー商で書かれている．ここで，Z は $k \times k$，ψ は $N \times k$ の複素行列である．これはもともとハナニーとトンによる予想であったが[9]，筆者らは場の理論の立場でこれを決定し，解の構成法も発見することができた[10]．また，(Z, ψ) に平坦な計量を入れた場合は，(19) は正しい計量は与えない．最近，藤森俊明氏を中心とした筆者のグループは，ボーテックス間の距離が十分に離れている場合に，正しい計量を求めることに成功した[11]．

このボーテックスのモジュライ空間は，インスタントンのモジュライ空間のスペシャル・ラグランジアン部分空間になっており，両者の深い関係を表している．同様に，モノポールとドメイン壁が関係するが，これはまたの機会に譲る．

7. おわりに

紙面の都合や筆者の力量不足から，今回述べることができなかったことはたくさんある．例えば，$\mathcal{N}=2$ の超対称性とツイスター理論との関係，超対称非線形シグマ模型を用いた指数定理の証明，トポロジカル・シグマ模型など．ヒッチンらの一般化された幾何学が数年前に提唱されたが，これも，超対称非線形シグマ模型で古くに発見されたことのリバイバルである．超対称性と複素多様体の深い関係を少しでも垣間見られたら幸いである．

参考文献

1) B. Zumino, *Phys. Lett. B* **87**, 203 (1979).
2) S. Aoyama, *Nuovo Cim. A* **57**, 176 (1980).
3) J. Wess and J. Bagger, "Supersymmetry and supergravity," Princeton, USA: Univ. Pr. (1992) 259 p.
4) M. Bando, T. Kuramoto, T. Maskawa and S. Uehara, *Phys. Lett. B* **138**, 94 (1984); *Prog. Theor. Phys.* **72**, 313 (1984).
5) L. Alvarez-Gaume and D.Z. Freedman, *Commun. Math. Phys.* **80**, 443 (1981).
6) U. Lindström and M. Roček, *Nucl. Phys. B* **222**, 285 (1983).
7) N.J. Hitchin, A. Karlhede, U. Lindström and M. Roček, *Commun. Math. Phys.* **108**, 535 (1987).
8) N.S. Manton and P. Sutcliffe, "Topological solitons," Cambridge, UK: Univ. Pr. (2004) 493 p; M. Shifman and A. Yung, "Supersymmetric solitons," Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr. (2009) 259 p.
9) A. Hanany and D. Tong, *JHEP* **0307**, 037 (2003) [arXiv:hep-th/0306150]; R. Auzzi, S. Bolognesi, J. Evslin, K. Konishi and A. Yung, *Nucl. Phys. B* **673**, 187 (2003) [arXiv:hep-th/0307287].
10) M. Eto, Y. Isozumi, M. Nitta, K. Ohashi and N. Sakai, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 161601 (2006) [arXiv:hep-th/0511088]; *J. Phys. A* **39**, R315 (2006) [arXiv:hep-th/0602170].
11) T. Fujimori, G. Marmorini, M. Nitta, K. Ohashi and N. Sakai, *Phys. Rev. D* **82**, 065005 (2010) [arXiv:1002.4580 [hep-th]].

（にった・むねと，
慶應義塾大学日吉物理学教室・自然科学研究教育センター）

特集／物理学と多様体

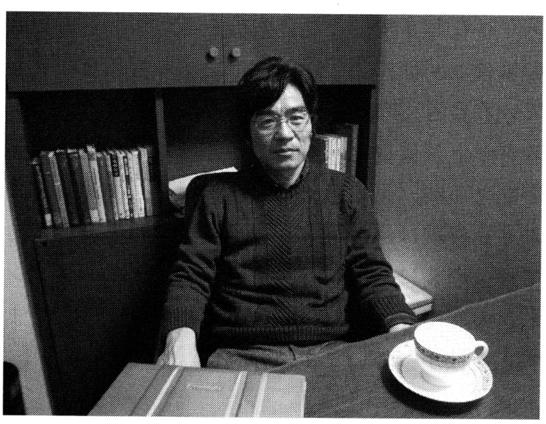
物理学における多様体の面白さ

安井　幸則（質問：編集部）

1. 物理学における多様体

――多様体と言いますと幾何学のイメージがありますが，物理学ではどのような効用をもたらしているのでしょうか．

多様体は物理学のいたるところで活躍しています．時空，対称性，解の空間等々，これらはどれも物理学の基礎的な部分を支えているものです．もっと身近な多様体を挙げるなら，平面や球面，それから机上にあるコーヒーカップの表面も凹凸がなく多様体の感じがします．力学や量子力学で学習する回転群やユニタリ群もリー群と呼ばれる多様体です．今回の特集でも，「ねこ」の運動から超弦理論まで，様々な形で多様体が登場するのを見



安井幸則氏．

ることができます．多様体という「顔」を全面に押し出している場合もあれば，縁の下からこっそりと物理を支えている場合もあります．

多様体は幾何学の最も基本的な枠組みを与えるものです．ちゃんとした定義は幾何学のテキストに譲りますが，大雑把にはユークリッド空間を貼り合わせたものが多様体です．あまり遠くを見なければユークリッド空間と区別がつきませんが，貼り合わせに応じて文字通り多種多様な多様体が存在します．ユークリッド空間の座標を使って多様体上でも微積分を展開することができます．このことが物理学と多様体を結びつける大きな要因になっています．なぜなら，多くの物理現象は微分方程式によって記述されるからです．「微分方程式の住処はどこですか？」「微分方程式の解は存在しますか？」というような問にしっかり答えるには，方程式の背景にある空間すなわち多様体の構造を明らかにすることが必要です．

物理学は，多様体という舞台の上に様々な役者を登場させます．電磁気学では，電場や磁場が回転している様子や，発散している様子を「矢印」を使って表現しますが，矢印の集合は多様体上のベクトル場として理解されるものです．ベクトル場を拡張したテンソル場，それからフェルミオンを記述するスピノール場等々いろいろな「場」が物理ではよく使われます．このような概念は，多様

体上で群や代数構造を考えることと密接に関連しており，幾何学ではファイバー束という便利な道具立てが用意されています．物理学で必要となる対象と，多様体上の数学的構造がマッチすることは決して珍しいことではありません．学生時代に，量子異常と呼ばれる対称性の破れを解析するのに幾何学の指数定理が使えるという話を聞いて感動したのを思い出します．以下ではもう少し具体的に多様体が物理学に登場する様子を述べてみたいと思います．

力学の問題ではニュートンの運動方程式が出発点です．物体の加速度は位置座標を時間に関して2回微分することで得られるので，力が加速度に比例するという運動方程式は2階の常微分方程式になります．物体が存在する実空間と運動量の空間を合わせて余接束と呼ばれる多様体が作られます．ここにはシンプレクティク形式という微分形式が住んでいてポアッソン括弧を誘導します．余接束上での運動方程式は，ニュートンの運動方程式と物理的には同等ですが見かけはかなり異なる方程式です．ハミルトン方程式として知られているものです．このように，多様体にシンプレクティク形式あるいはポアッソン括弧を与えて力学を調べることは解析力学と呼ばれる分野に属します．解析力学は，古典論としての重要性だけでなく，量子論を構築する上でも重要な役割を果たしたということはよく知られていることです．

一般相対性理論の舞台は，計量テンソルを持つ4次元多様体です．リーマン多様体では正定値な計量（内積）を扱いますが相対論で必要となるのはミンコフスキー空間型の不定値計量であり，そのような計量を持つ多様体はローレンツ多様体と呼ばれています．ローレンツ多様体は時空を表し，計量テンソルは重力場と解釈されます．重力場すなわち計量を規定する方程式がアインシュタイン方程式です．この方程式は，多様体の微分同型写像で不変な非線形偏微分方程式となっていて解を求めることは大変難しい作業になります．1963年，ニュージーランドの物理学者カーによって回転するブラックホール解が発見されました．その後の研究で，「無毛定理」と呼ばれるカー解の一意性が証明され，カーの模型はブラックホール研究の中で重要な位置を占めるようになりました．ブラックホールの著しい性質は，ひとたび飲み込まれると光でさえも決して外に出ることのできない一方通行の時空の境界があることです．その境界は幾何学的にも大変興味深い対象で，ヌルで連結な全測地的超平面と呼ばれる特別な部分多様体になっています．これ以外にも時空特異点の存在や，測地線の完備性など幾何学的な手法を使ってブラックホールの様々な性質が解明されています．

最後に量子力学のトンネル現象を取り上げましょう．ミクロの世界では，たとえ壁があっても物体は波のように壁の中を通り抜けることができるという不思議な現象です．この現象は，量子力学の基礎方程式であるシュレーディンガーの波動方程式を解析することで，もちろん理解することができます．しかし，量子論を持ち出さなくても“虚数時間”のニュートンの運動方程式の解によってもトンネル現象を記述できることが知られています．この解は瞬間的に壁を越える「物体」を表すのでインスタントンと呼ばれています．ニュートン方程式だけでなく，マックスウェル方程式を拡張したヤン・ミルズ方程式，それからアインシュタイン方程式でも時間を虚数にした世界にインスタントンが存在します．これらの解もニュートン方程式の場合と同様に量子論的なトンネル現象を記述していると考えられています．幾何学的には，インスタントンは自己双対接続と呼ばれる特別な接続をファイバー束で考えることに対応します．このような接続は超対称ゲージ理論や超重力理論そして超弦理論にも応用されており，近年インスタントンの有用性はトンネル現象の物理を超えて，ますます拡がっています．

2. 佐々木多様体

——特集中で取り上げられている佐々木多様体の佐々木重夫先生（1912–1987）は少し昔の方のようです．この佐々木多様体も佐々木先生の時代のものだと思いますが，いま，なぜ注目されているのでしょうか．

私自身，佐々木多様体という言葉を聞いたのはかなり最近のことです．2003年から2004年くらいにかけて，今回の特集で執筆して下さった橋本義武さん，それから阪口真さんとブラックホール時空からある種のコンパクトなアインシュタイン多様体を構成するという研究をしていました．あるとき，マルテリ・スパークス（2人の若手素粒子論研究者）からメールがきて，その内容は「私たちの構成している多様体に佐々木多様体は含まれていますか？」というものでした．最近彼らが佐々木・アインシュタイン計量の論文*1) を書いているのを知っていたので，その関連で質問してきたのだと思いました．当時は佐々木多様体をあまり気にしていなかったこともあり「おそらく含まれていないでしょう」とかなり気楽に返事をしたように記憶しています．このコメントは彼らの論文にそのまま載ってしまいました．その後わかったことですが，私たちの作った多様体の中に一つだけ佐々木多様体が入っていました．しかしながら，それは佐々木重夫先生の時代にすでに知られていたもので残念ながら新しいものではありませんでした．また，私たちの構成方法をもうひとひねりすると，彼らの佐々木・アインシュタイン計量をブラックホール計量から導出できることもわかりました．この頃から現在も含め，佐々木多様体は私の研究テーマの一つになりました．

近年，素粒子論の分野において佐々木多様体は大変注目されるようになりました．その理由を説明するためにマルテリ・スパークスたちの仕事についてもう少し続けます．もっと詳しい内容を知りたい方は今回の特集の山崎雅人さん，二木昭人さんの記事を御覧下さい．彼らの発見した佐々木・アインシュタイン計量は，超弦理論の新しいソリトン解を記述すると考えられています．佐々木・アインシュタイン計量は，佐々木多様体上のリーマン計量であると同時にアインシュタイン方程式の解にもなっています．この意味で単に佐々木というのではなくアインシュタインの名前も一緒に入れてそう呼んでいます．さて，このソリトン解ですが，ゲージ・重力対応と呼ばれる超弦理論の予想を使うと素粒子の相互作用を記述する4次元のゲージ理論を調べることができます．ゲージ・重力対応は1997年マルダセナによって提案された予想で，ソリトンの幾何学的な構造とゲージ理論のある種の構造に対応関係があることを主張します．この予想を使って，佐々木多様体の幾何学からゲージ理論の強結合領域での量子効果を解析することができるようになってきました．このような領域では理論に含まれる結合定数が大きくファインマン規則を用いた場の量子論の摂動的な計算が破綻するため，幾何学を使って解析できるというのは大きな前進です．こうして，佐々木多様体は純粋に数学の研究対象であるだけでなく，超弦理論のゲージ・重力対応を解明するための具体的な模型を提供するという物理学への応用が見出され，多くの研究者を魅了しています．

3. 多様体を学ぶ

——多様体そのものは数学における定義も抽象的でとっつきづらいイメージがあるかと思いますが，例えば，物理学を主に学んできた人が多様体を勉強しようとする場合，どのようなことを主眼において勉強するとよいでしょうか．

これまでに学習してきた物理学の内容を幾何学の視点からもう一度勉強するという気持ちで多様

*1) “Sasaki-Einstein Metrics on $S^2 \times S^3$”, Jerome P. Gauntlett, Dario Martelli, James Sparks, Daniel Waldram, *Adv. Theor. Math. Phys.* **8** (2004) 711–734.

体を勉強するのは一つの方法ではないでしょうか．同じものでも見方を変えると大変新鮮なものに見えるので，自分に合ったテキストを選べば退屈することはないでしょう．また，幾何学の定義に書いてある抽象的な概念も，実在する具体的なものと結び付けることによって納得できるものになると思います．集合論や位相空間から始めて多様体の基礎的な事項を一つ一つ積み上げていくより，これまでの物理の蓄積をできるだけ有効活用することを考えましょう．自分自身のことを振り返ってもそのようにしてきたと思われます．しかしながら，どこかの時点で地道にコツコツと基礎固めをすることは必要になるでしょう．高いピラミッドを組み立てるにはそれに見合った土台をしっかり固める必要があるのと同じことです．

物理学科の力学あるいは解析力学の講義では，ランダウ・リフシッツの『力学』をテキストとして使うことが多いと思います．このテキストは独創的かつすばらしいものです．物理的にはかなり近い内容ですが，もっと幾何学的なところに重点をおいたアーノルドの『古典力学の数学的方法』という本があります．物理で力学を学んだ人が多様体を学習するのに大変よい本だと思います．逆に，幾何学をある程度学習した人が力学を理解するのにも大変よい本です．もう一つ紹介しましょう．一般相対性理論は入門書から専門書まですぐれたテキストがたくさんあります．幾何学を相対論から学習するならオニールの書いた『カー・ブラックホールの幾何学』という本はお勧めです．ブラックホールという具体的な題材を使って多様体のいろいろな側面を学習できます．もちろん，ブラックホールのテキストとしても他の本にない独自性があり興味深く読めると思います．

4. 影響を受けたこと

――先生が研究者になるに当たって影響を受けたことをお聞かせ下さい．

大学の学部時代は工学部の原子核工学科に所属していました．核燃料から製図まで原子力を中心に幅広い分野のカリキュラムが組まれていました．その中の一つに量子力学の授業があり，大変興味を持ちました．他の科目に関してはあまり熱心な学生ではなかったと思いますが，量子力学に関しては，気の合った仲間と自主ゼミをしたり，先生の研究室に頻繁に出入りして量子論のお話を聞いたりして頑張って勉強しました．このまま工学部にいても好きな道に進めないと感じ，一大決心して大学院からは理学部に移り素粒子論を専攻しました．

大学院時代に受けた大きな影響は例外群に出会ったことです．当時ドイツから帰ったばかりの先生に，素粒子の統一模型に例外群が使えるから勉強しないかと誘われました．直交群とかユニタリ群にはある程度親しみがありましたが，例外群というのはその定義も知らないし，周りを見ても勉強している人はいませんでした．しかし，そのメジャーでないところが気に入り大学院時代のほとんどの期間は，例外群に基づく素粒子の統一模型を研究しました．最近は主にアインシュタイン計量やブラックホールに関する研究をしていますが，いまだに例外群へのこだわりは残っています．

5. メッセージ

――今後，研究者を目指す方や学生さんへのメッセージをお願いします．

自分らしい研究目標を見つける．流行に振り回されない．基礎学力を身に付ける．忍耐強く問題に立ち向かう・・・いろいろありますが，私自身まだ発展途上であり，あまり一般論を語っても説得力がないので，自分の経験をもう少し述べてメッセージに代えたいと思います．

先にも言いましたが，大学院時代の研究は先生の指導で自然に決まりました．例外群に出会うこ

とができ，おかげで研究の独自性も発揮できたと思うので，大変良かったと今では思っています．当時は他のことはあまり考えることなく，ひたすらルートやウェイトの計算ばかりしていました．学生を卒業して研究者になってからは「どのような研究テーマで将来やっていくのか」大変悩みました．大阪に来て研究環境も変わったので新しいことに挑戦しようと思いました．幸運だったことは，同僚に物理を好きな数学者がいたことです．私も数学，特に幾何学に興味があったので，お互いかなり専門的なレベルで議論することができました．そうこうしているうちに幾何学の素養もついてきて，紆余曲折を経てアインシュタイン計量を研究テーマに選びました．ひとたび決まってしまえば興味の向くまま，できることを最大限するだけです．同じような興味を持っている仲間も研究を続けることでだんだん増えてきました．お互い刺激し合って成長していけたら大変幸せです．

（やすい・ゆきのり，大阪市立大学大学院理学研究科）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

開原　成允

1981年4月号

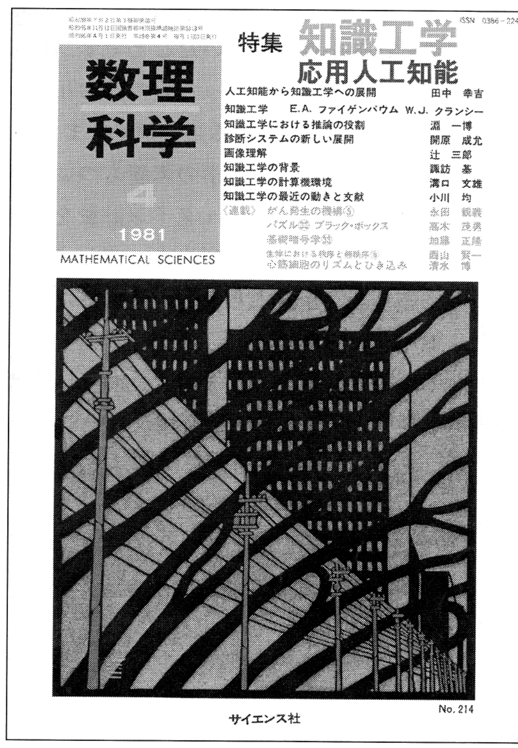
知識工学の特集が組まれた1981年頃は，計算しかできないと思われていたコンピュータに推論ができることが明らかになり，将来コンピュータが人間の知能を越えるかもしれないという夢が生まれた時代であった.「第五世代コンピュータ」という巨大な国家プロジェクトが開始されたのは，翌年の1982年であるが，1981年には既にその計画は語られていた.

医学・医療への応用も盛んに行われた. スタンフォード大学のファイゲンバウム（Edward Feigenbaum）が知識工学という領域を創設し，そのグループと医学部のショートリフ（Edward H Shortliffe）が協力してMYCINという抗生物質の使用を助言するエキスパートシステムが作られた. 私自身も，ファイゲンバウムのグループと交流しつつ，同じ夢を追ってエキスパートシステムの開発に大きな勢力を注いでいた.

それから30年，あのときの熱気はどこに行ったのであろうか？ 実用性という観点からすれば，今，アメリカの多くの医師はポケットに入る電子手帳のようなものを携行している. その中には，病気に伴う症状や使うべき薬の膨大な情報が蓄積されていて，必要なときに医師はそれを使いながら診療している. 日本では，このような機器はあまり普及していないが，コンピュータネットワーク上にある同じような情報を参照しながら診療している. これは，まさに1980年代の我々が夢見た医療に関する膨大な知識がコンピュータ中に蓄積され利用されていることになる.

しかし，そのシステムは，推論するコンピュータというよりは，データベースの検索システムと言ったほうがよいものである. 医師は，診断や治療の筋道は理解していても細かい点を確認する必要はある. 医師が求めていたのは，膨大な知識の中から必要なものを取り出して眼前に提示することであり，コンピュータが推論して答えまで教えてくれることは望まなかったのである.

一方，学問的には，知識工学の流れは，オントロジーによって引き継がれたと言ってもいいであろう. 人の認知という哲学的問題から，自然言語処理や知識の表現法などの工学的問題までを含む体系ができあがりつつある. 知識を扱う優れたエディターが開発され，知識が目に見える形でコンピュータ中に構築でき，またそれを共有することも可能となった. このため，積み木を重ねるように大きな知識をつくりあげる可能性も開けた. オントロジーはまだ完全に確立された体系ではない. 今後どのような新しい可能性を開くかについてはわからないが，その進歩が，我々に再び夢を与えてくれることを期待したい.



（かいはら・しげこと，国際医療福祉大学大学院医療福祉学研究科）

〈追記〉 著者の開原成允先生が，本稿ご脱稿後に急逝されました. 先生のご逝去を悼み，心からご冥福をお祈り申し上げます.
（編集部一同）

情報幾何の新展開

脳と情報の数理科学

第5回

確率分布族と不変なダイバージェンス

甘 利 俊 一

確率分布の作る空間には，確率変数 x のスケール変換に関わる不変性が要請される．すなわち，確率分布の集まりを空間と考えたときに，確率変数 x をどのように変換して表現しても確率分布は同じものを指すわけで，空間の幾何学構造は同一でなければならない．また，分布を指定するパラメータ（座標系）に関しても，どのような座標系を取っても空間の構造自体は同じであることが要請される．不変性の要請から導かれる幾何学は何か，今回はそれを見よう．

5.1 粗視化と単調性

離散確率分布を用いて不変性を議論する．例によって，$n+1$ 個の値 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ を取る離散確率変数 x を考える．

$$p_i = \mathrm{Prob}\{x = x_i\}, \quad i = 0, 1, \cdots, n \tag{5.1}$$

とし，確率分布を $\boldsymbol{p} = (p_0, p_1, \cdots, p_n)$ と書こう．もちろん，$p_i > 0$ のすべてが自由ではなくて，$\sum p_i = 1$ の制約が入る．確率分布の全体 $S_n = \{\boldsymbol{p}\}$ を考える．S_n は n 次元シンプレックスである．2つの分布 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ のダイバージェンス $D[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}]$ を考えよう．これが成分ごとの和の形で書ける場合，

$$D[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}] = \sum_{i=0}^{n} d\left(p_i, q_i\right) \tag{5.2}$$

を分解可能なダイバージェンスと言う．とりあえずこの場合を考える[*1]．

いま，$X = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ の $n+1$ 個の要素をいくつかずつひとまとめにして，$m+1$ 個に区分けしよう．例えば，まとめられた要素のくくりを $A_0, \cdots, A_m$

---

*1） 不変性の要請から，$D[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}]$ は成分 i の順番を入れ換えても変わらない．つまり x_i を x_j にし，x_j を x_i にしてもそれは名前のつけ換えである．だから，分解可能な場合，各成分について同じ関数 $d(p, q)$ を用いてよい．

とすると，$A_\lambda, \lambda = 1, \cdots, m$ は X の部分集合で，その全体が X の分割になる．例えば，くくりを箱と呼べば，各箱 A_λ にはいくつかの x_i が

$$A_0 = \{x_0, x_3, x_6\}, \quad A_1 = \{x_1, x_2, x_8\}, \quad \cdots \tag{5.3}$$

のように入る．x としてどの x_i が出たか観測できなくて，x がどの箱 A_λ に入っているかだけが観測できるとしよう．これは観測の粗視化である．x が A_λ に入る確率は

$$\bar{p}_\lambda = \sum_{x_i \in A_\lambda} p_i \tag{5.4}$$

である．だから粗視化によって確率分布は，$A_0, \cdots, A_m$ 上の分布となって

$$\bar{\boldsymbol{p}} = (\bar{p}_0, \cdots, \bar{p}_m) \tag{5.5}$$

になる．これにより，2 つの分布 $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ の間のダイバージェンスは $D[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}]$ から $\bar{D}\left[\bar{\boldsymbol{p}} : \bar{\boldsymbol{q}}\right]$ に変わる．

2 つの分布は粗視化によって区別がつきにくくなるから，その分離の度合であるダイバージェンスは一般に小さくなる．

$$D[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}] \geq \bar{D}\left[\bar{\boldsymbol{p}} : \bar{\boldsymbol{q}}\right]. \tag{5.6}$$

これを情報単調性と言う．ところで，等式が成り立つとき，つまりダイバージェンスが粗視化によっても減らないときはどのようなときであろうか．

いま，観測が x は箱 A_λ に入っていることを示したとしよう．ここで，A_λ の中のどの x_j であったかをさらに調査して知ったとしよう．x が A_λ に入っていることが分かった時点で，x の確率分布 $\boldsymbol{p}$ は，A_λ の条件付き分布

$$p\left(x = x_j | x \in A_\lambda\right) = \begin{cases} 0, & x_j \notin A_\lambda \text{のとき}, \\ \dfrac{p_j}{\bar{p}_\lambda}, & x_j \in A_\lambda \text{のとき} \end{cases} \tag{5.7}$$

になっている．$\boldsymbol{q}$ についても同じである．このとき，どの A_λ と $x_j \in A_\lambda$ についても

$$p\left(x = x_j \,| x \in A_\lambda\right) = q\left(x = x_j \,| x \in A_\lambda\right) \tag{5.8}$$

が成立するならば，粗視化を解除して観測しても，$\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ とを区別する情報はそれ以上得られない．したがって，このときはダイバージェンスは変わらず，

$$D[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}] = \bar{D}\left[\bar{\boldsymbol{p}} : \bar{\boldsymbol{q}}\right] \tag{5.9}$$

が成立する．これが，上記の (5.8) のとき，このときに限るという要請を置く．この要請を満たすダイバージェンスを不変なダイバージェンスと呼ぶ．

定理 5.1 分解可能で不変なダイバージェンスは，$f(1) = 0$ を満たす微分可能な凸関数 f を用いて

$$D_f[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}] = \sum p_i f\left(\frac{q_i}{p_i}\right) \tag{5.10}$$

と書ける*2)．

*2) 分解可能でなければ，不変なダイバージェンスは他にもある．例えば，k を $k(0) = 0, k'(0) > 0$ を満たす単調増大関数とすれば，$k\left\{D_f\left[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}\right]\right\}$ は分解できない不変なダイバージェンスである．

これを f ダイバージェンスと呼ぶ．f ダイバージェンスは Ali と Silvey[1]，森本[2]および Csiszár[3]が導入したが，Csiszár がその性質を詳しく調べたため，いまは Csiszár の f ダイバージェンスと呼ばれる．

まず，定理の証明をしておく．これは甘利の論文[4]による．

証明　まず，f ダイバージェンスは情報単調性を満たすことを示す．簡単のため，x_1 と x_2 とを箱 A_1 に入れ，他の x_i はそのまま 1 個ずつ 1 つの箱に入っている場合を考える．他の場合も同様に証明できるからである．この場合

$$p_1 f\left(\frac{q_1}{p_1}\right) + p_2 f\left(\frac{q_2}{p_2}\right) \geq (p_1 + p_2)\, f\left(\frac{q_1 + q_2}{p_1 + p_2}\right) \tag{5.11}$$

を示せば情報単調性が言える．わかりやすくするために，

$$u_1 = \frac{q_1}{p_1}, \quad u_2 = \frac{q_2}{p_2} \tag{5.12}$$

とおけば，(5.11) の右辺は

$$(p_1 + p_2)\, f\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2} u_1 + \frac{p_2}{p_1 + p_2} u_2\right) \tag{5.13}$$

であるが，f は凸関数だから，上式は

$$(p_1 + p_2)\, f\left(\frac{p_1}{p_1 + p_2} u_1 + \frac{p_2}{p_1 + p_2} u_2\right) \leq p_1 f(u_1) + p_2 f(u_2) \tag{5.14}$$

を満たすので，情報単調性が成立する．

逆に，情報単調性が成立したとしよう．このとき，x_1 と x_2 からなる箱 A_1 では，$u_1 = u_2$ のとき，このときにのみ，等号が成立する．これは

$$d(p_1, q_1) + d(p_2, q_2) = d(p_1 + p_2, q_1 + q_2) \tag{5.15}$$

である．ここで，関数 $k(p, u) = d(p, up)$ を考えれば，

$$k(p_1, u) + k(p_2, u) = k(p_1 + p_2, u) \tag{5.16}$$

が $u > 0$ に対して成立するから，k は p に関して線形で

$$k(p, u) = f(u)p \tag{5.17}$$

と書ける．これより

$$d(p, q) = pf\left(\frac{q}{p}\right) \tag{5.18}$$

が成立する．

（証明終）

5.2 標準 f 関数と Fisher 情報行列

ここで，f ダイバージェンスに関し次の 2 つの性質に注目しよう．まず，凸関数 f に 1 次関数を加えて

$$\bar{f}(u) = f(u) + c(u - 1) \tag{5.19}$$

としてみる．新しい $\bar{f}$ を用いても，

$$D_{\bar{f}}[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}] = D_f[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}] \tag{5.20}$$

で，ダイバージェンスは変わらない．したがって，f が微分可能なときには，

$$\bar{f}(u) = f(u) - f'(1)(u-1) \tag{5.21}$$

を用いることにすれば，この新しい関数 $\bar{f}$ を f とすると，

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 0 \tag{5.22}$$

を満たす．また，f を定数倍して cf を用いれば，ダイバージェンスは c 倍されるだけである．

$$D_{cf}[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}] = cD_f[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}]. \tag{5.23}$$

これはダイバージェンスのスケールを定めるだけだから，2 階微分を使って f としては

$$f''(1) = 1 \tag{5.24}$$

を満たすものに規格化しておこう．条件 (5.22), (5.24) を満たす凸関数を標準凸関数と呼ぶことにする．

標準凸関数を使えば，2 つの近い分布 $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{p}+d\boldsymbol{p}$ のダイバージェンスは，どの f を用いても

$$ds^2 = D_f\left[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{p}+d\boldsymbol{p}\right] = ds^2 = \frac{1}{2}f''(1)\sum_{i=0}^{n}\frac{(dp_i)^2}{p_i} \tag{5.25}$$

となってすべて同じものに規格化される．これがリーマン計量 g_{ij} を定義する．$\sum p_i = 1$ のため，$\sum dp_i = 0$，したがって $\boldsymbol{p} = (p_0, p_1, \cdots, p_n)$ のうちで $p_1, \cdots, p_n$ を座標系に用いれば

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{dp_i^2}{p_i} + \frac{\left(\sum dp_i\right)^2}{p_0} \tag{5.26}$$

$$= \sum\left[\frac{1}{p_i}\delta_{ij} + \frac{1}{p_0}\right]dp_i dp_j \tag{5.27}$$

が得られる．以下の定理は不変性からリーマン計量が一意に定まることを示す．

定理 5.2　確率分布空間 S_n における不変なリーマン計量は

$$g_{ij}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{p_i}\delta_{ij} + \frac{1}{p_0} \tag{5.28}$$

であり，これは Fisher 情報行列である*3)．

ダイバージェンス $D[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}]$ は 2 つの変数 $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ に関して対称ではなかった．しかし，$D^*[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}] = D[\boldsymbol{q}:\boldsymbol{p}]$ とおけば，これもダイバージェンスである．しかも不変だから，うまい f^* を用いれば，これも f ダイバージェンスになっているはずである．凸関数 f の双対関数を

$$f^*(u) = uf\left(\frac{1}{u}\right) \tag{5.30}$$

---

*3)　Fisher 情報行列は

$$g_{ij}(\boldsymbol{p}) = E\left[\frac{\partial \log p(x,\boldsymbol{p})}{\partial p_i}\frac{\partial \log p(x,\boldsymbol{p})}{\partial p_j}\right] \tag{5.29}$$

で定義される．これを計算すれば定理が得られる．

と置いてみる．このとき f^* も凸関数で，

$$D^*[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}] = D[\boldsymbol{q}:\boldsymbol{p}] \tag{5.31}$$

となっていることが分かる．だから，ダイバージェンスの向きを変えたものも，同じ仕方で扱える．

5.3 いろいろな f ダイバージェンス

f ダイバージェンスには，f の選び方によっていろいろなものがある．ここでは，見やすくするために，規格化されていない f を使い，いくつかの例を挙げる．

1) ユークリッドダイバージェンス

$$f(u) = \frac{1}{2}u^2, \quad D[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}] = \frac{1}{2}\sum |p_i - q_i|^2. \tag{5.32}$$

これは，ユークリッド距離の2乗を与える．

2) Hellinger 距離

$$f(u) = 4(1-\sqrt{u}), \quad D[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}] = 2\sum\left(\sqrt{p_i}-\sqrt{q_i}\right)^2. \tag{5.33}$$

これは，Hellinger 距離と呼ばれるダイバージェンスであって，この場合も $\boldsymbol{p}$ と $\boldsymbol{q}$ に関して対称である．

3) KL ダイバージェンス

$$f(u) = -\log u, \quad D_f[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}] = \sum p_i \log\frac{p_i}{q_i}. \tag{5.34}$$

これは KL ダイバージェンスである．また，f の双対である

$$f^*(u) = u\log(u) \tag{5.35}$$

を用いれば，これは向きを変えた KL ダイバージェンスである．

$$D_{f^*}[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}] = KL[\boldsymbol{q}:\boldsymbol{p}]. \tag{5.36}$$

4) α ダイバージェンス

α を実数パラメータとして

$$f_\alpha(u) = \frac{4}{1-\alpha^2}\left(1-u^{\frac{1+\alpha}{2}}\right), \quad \alpha \neq \pm 1 \tag{5.37}$$

を定義しよう．$\alpha = \pm 1$ のときは極限をとって

$$f_\alpha(u) = \begin{cases} u\log u, & \alpha = 1 \\ -\log u, & \alpha = -1 \end{cases} \tag{5.38}$$

と置く．このとき，α ダイバージェンスと呼ばれる

$$D_\alpha[\boldsymbol{p}:\boldsymbol{q}] = \begin{cases} \dfrac{4}{1-\alpha^2}\left(1-\sum p_i^{\frac{1+\alpha}{2}} q_i^{\frac{1-\alpha}{2}}\right), & \alpha \neq \pm 1 \\ \sum q_i \log\dfrac{q_i}{p_i}, & \alpha = 1 \\ \sum p_i \log\dfrac{p_i}{q_i}, & \alpha = -1 \end{cases} \tag{5.39}$$

が得られる．

これをよく見ると，$\alpha = 0$ のときは Hellinger 距離，$\alpha = -1$ のときは KL ダイバージェンス，$\alpha = 1$ のときは KL ダイバージェンスの逆向き，さらに $\alpha = 2$ のときは χ^2 ダイバージェンス，となる．これは多くのダイバージェンスを連続に結ぶ重要なダイバージェンスの族を作っている．

5) 変分距離

少し変わったところで，$f(u) = |u|$ と置いてみよう．これは微分可能ではないが，凸関数ではある．このとき得られるダイバージェンスは

$$D[\boldsymbol{p} : \boldsymbol{q}] = \sum |p_i - q_i| \tag{5.40}$$

である．これは変分距離とも呼ばれ，よく使われる距離である．

5.4 正測度空間におけるダイバージェンス

確率分布 $\boldsymbol{p} = (p_0, p_1, \cdots, p_n)$ は，束縛 $\sum p_i = 1$ を満たし，各成分は正である．和が 1 になるという規格化をはずしてみよう．すると，空間は

$$M_n = \{\boldsymbol{m} = (m_1, \cdots, m_n), m_i > 0\} \tag{5.41}$$

に広がる．このとき，各 m_i は要素 x_i の測度（強度）を表すものとなり，全部足して 1 になるという規格化条件をはずす．このような $\boldsymbol{m}$ を集合 X の上の正測度と言う．

例を挙げよう．2 次元平面上の画像は，画像の平面 (x, y) の各点の明るさの分布 $s(x, y)$ で表せる．画面をピクセルに離散化すれば，各画素の明るさは $s(i, j)$ となる．ただし (i, j) は画素で，$i, j = 1, \cdots, n$ とする．このとき画像全体の集合は正測度空間 M_{n^2} になっている．この他，音声信号のスペクトラム $S(\omega)$ も離散化すれば正測度空間をなす．正定値行列の全体は，個々の成分が正であるわけではないが，規格化がないという意味で似た取扱いができる．

M_n は，ユークリッド空間の第一象限だけを考えたものである．だから，線形計画法などで変数 x_i に正値条件

$$x_i > 0, \quad i = 1, \cdots, n \tag{5.42}$$

のある場合，ベクトル $\boldsymbol{x}$ は M_n をなすと言ってよい．これは変数がコーン

$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{x} > 0, \quad i = 1, \cdots, k \tag{5.43}$$

に束縛されている場合にも拡張できる．

このように，M_n はいろいろなところで現れる．M_n の中で $\sum m_i = 1$ を満たすものを考えれば，これを確率分布と見なすことができる．確率分布の空間 S_{n-1} は，M_n の線形部分空間

$$S_{n-1} = \left\{ \boldsymbol{p} \,\middle|\, \sum p_i = 1 \right\} \tag{5.44}$$

である．M_n の点 $\boldsymbol{m}$ を規格化

$$\tilde{\boldsymbol{m}} = \frac{1}{\sum m_i} \boldsymbol{m} \tag{5.45}$$

によって S_{n-1} に射影することができる．

さて，M_n に，f ダイバージェンスを導入しよう．いま，f を標準凸関数とする．このとき，M_n の 2 点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の f ダイバージェンスを

$$D_f[\boldsymbol{x}:\boldsymbol{y}] = \sum x_i f\left(\frac{y_i}{x_i}\right) \tag{5.46}$$

で定義する．これはダイバージェンスの条件を満たす．ただし，正測度の場合は，f は標準凸関数でなければいけない．f に 1 次関数を勝手に加えたもの，つまり，1 次の項を勝手に加えて

$$\bar{f}(u) = f(u) - c(u-1) \tag{5.47}$$

とすれば，D_f はダイバージェンスとは限らないから注意が必要である．

α ダイバージェンスは，実数 α を用いて

$$D_\alpha[\boldsymbol{m}:\boldsymbol{n}] = \begin{cases} \dfrac{4}{1-\alpha^2}\sum\left\{\dfrac{1-\alpha}{2}m_i + \dfrac{1+\alpha}{2}n_i - m_i^{\frac{1-\alpha}{2}} n_i^{\frac{1+\alpha}{2}}\right\}, & \alpha \neq \pm 1, \\ \sum\left\{m_i - n_i + n_i \log\dfrac{n_i}{m_i}\right\}, & \alpha = 1, \\ \sum\left\{n_i - m_i + m_i \log\dfrac{m_i}{n_i}\right\}, & \alpha = -1 \end{cases} \tag{5.48}$$

と書くことができる．関数 f_α は標準化した

$$f_\alpha(u) = \begin{cases} \dfrac{4}{1-\alpha^2}\left(1 - u\dfrac{1+\alpha}{2}\right) - \dfrac{2}{1-\alpha}(u-1), & \alpha \neq \pm 1 \\ u\log u - (u-1), & \alpha = 1 \\ -\log u + (u-1), & \alpha = -1 \end{cases} \tag{5.49}$$

を用いる．特に，KL ダイバージェンスには，新しい $\sum\{m_i - n_i\}$ という項が加わっていることに注意．確率分布の場合はこれは消失する．

確率分布の空間 S_n および正測度の空間 M_n に標準凸関数 f を用いてダイバージェンスを定義できた．2 つの近い正測度 $\boldsymbol{m}$ と $d\boldsymbol{m}$ のダイバージェンスは，テイラー展開すれば

$$D_f[\boldsymbol{m}:\boldsymbol{m}+d\boldsymbol{m}] = \sum m_i f\left(1 + \frac{dm_i}{m_i}\right) \tag{5.50}$$

$$= \sum \frac{f''(1)}{2m_i} dm_i^2 \tag{5.51}$$

である．これが空間 M_n のリーマン計量がである．

定理 5.3　標準凸関数 f から得られる M_n のリーマン計量は，f によらずすべて

$$g_{ij}(\boldsymbol{m}) = \frac{1}{m_i}\delta_{ij} \tag{5.52}$$

である．これは，ユークリッド計量を持つ空間である．

証明

$$D_f[\boldsymbol{m}:\boldsymbol{m}+d\boldsymbol{m}] = \frac{1}{2}\sum g_{ij}(\boldsymbol{m}) dm_i dm_j \tag{5.53}$$

より g_{ij} が出る．微小距離の 2 乗は

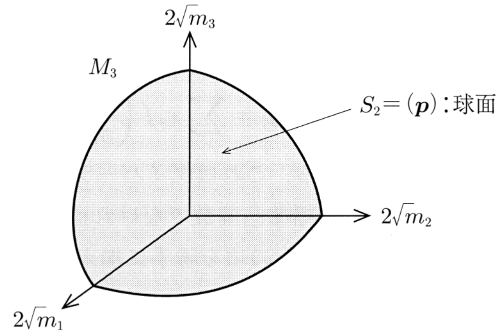


図 5.1　確率分布の空間 S_2 は正測度空間 M_3 の球面である．

$$ds^2 = 4\sum (d\sqrt{m_i})^2 \tag{5.54}$$

と書けるから，m_i の代わりに $2\sqrt{m_i}$ を座標系に取れば，$\boldsymbol{m}$ によらずに g_{ij} が単位行列になる．すなわち $2\sqrt{m_i}$ を正規直交座標とするユークリッド計量の空間に他ならない*4)．

S_{n-1} は M_n の部分空間であった．M_n の計量はユークリッド空間である．しかし，束縛 $\sum p_i = 1$ は M_n で $2\sqrt{m_i}$ を座標系としたときには球面

$$\sum_{i=0}^{n} m_i^2 = 4 \tag{5.55}$$

になる（図 5.1）．S_{n-1} のリーマン計量は球面上の自然の計量に他ならない．これはユークリッド計量ではない．

5.5 不変性の一般化

不変性を一般化して考えることができる．いま，$\boldsymbol{\xi}$ をパラメータとする確率分布族を $S = \{p(x, \boldsymbol{\xi})\}$ と考えよう．確率変数 x を逆変換可能な関数を用いて，

$$y = k(x), \quad x = k^{-1}(y) \tag{5.56}$$

に変換してみよう．すると確率密度関数は

$$\bar{p}(y, \boldsymbol{\xi}) = p\{x, \boldsymbol{\xi}\} \frac{dk^{-1}(y)}{dy} \tag{5.57}$$

に変わる*5)．しかし，この分布の作る空間 $\bar{S} = \{\bar{p}(y, \boldsymbol{\xi})\}$ も元の分布の作る空間 S も，各点は同じ座標 $\boldsymbol{\xi}$ で指定され，実質は同じでただ確率変数の表現を変えただけである．だから，両者に導入される幾何学構造，例えばダイバージェンスは同じように定義するのが正統である．

さらに進んで，十分統計量という考えを入れる．いま，確率変数の関数

$$s = k(x) \tag{5.58}$$

*4) M_n の計量はユークリッド的である．しかし後回に述べるように，これは非ユークリッド的な双対アファイン接続を持つ空間であってユークリッド空間ではない．

*5) 確率変数が多次元の場合は $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{x}), d\boldsymbol{k}^{-1}/d\boldsymbol{y}$ はヤコビ行列式 $|d\boldsymbol{x}/d\boldsymbol{y}|$ となる．

があったとしよう．これは逆変換が可能でなくてよいとする．確率分布 $p(x, \boldsymbol{\xi})$ が s と x を用いて

$$p(x, \boldsymbol{\xi}) = \bar{p}(s, \boldsymbol{\xi}) r(x) \tag{5.59}$$

のように書けて，パラメータ $\boldsymbol{\xi}$ による部分は s だけの関数で，残りの x による部分 $r(x)$ は $\boldsymbol{\xi}$ にはよらないとしよう．このとき，観測されたデータからパラメータ $\boldsymbol{\xi}$ についての推論をするのに，s だけを使えばよい．つまり，無駄なデータを捨てて，x を s に縮約しても十分である．このような s があるとき，これをを十分統計量と言う．

不変性の議論は次のように言いかえることができる．

不変性：確率分布空間に導入する幾何学的量は，十分統計量を用いて書けるべきである．

初めに定義した情報単調性で，ダイバージェンスに等号が成立するのは，この特殊な場合と考えることができる．

終わりの一言

今回は f ダイバージェンスを中心に述べた．ここから Fisher 情報行列が S_n の唯一の不変なリーマン計量になることが導けた．確率分布族の空間がリーマン空間になること，その時の計量として Fisher 情報行列を用いることを述べたのは，若干 24 歳の C.R. Rao であった．数学の輝く功績として Rao がアメリカの大統領メダルを受賞したときの業績文にもこのことが述べられている．情報幾何はここに始まると言ってよい．

ロシアの数学者 Chentsov は，不変性の考えを提唱し，Rao の導入した計量が唯一の不変なものであることを示した．彼はさらに不変なアファイン接続を導いている．しかし，この仕事がロシアで発表されたため，その普及は遅れたのが残念である．ここではまだ述べなかったが，不変性は双対な α アファイン接続を定めるが，これは一般に平坦でない．これが平坦な Bregman ダイバージェンスになるのは特殊な場合である．

参考文献

1) M.S. Ali and S.D. Silvey, A general class of coefficients of divergence of one distribution from another, *J.R. Statist. Soc. B*, **28**, 131–142, 1966.
2) T. Morimoto, Markov processes and the H-theorem, *J. Phys. Soc. Jap*, **12**, 328–331, 1963.
3) I. Csiszár, *Information measures: A critical survey*, in Proc. 7th Conf. Inf. Theory, Prague, Czech Republic, 83–86, 1974.
4) S. Amari, α-divergence is unique, belonging to both f-divergence and Bregman divergence classes, *IEEE Transactions on Information Theory*, **55**, 11, 4925–4931, 2009.

（あまり・しゅんいち，理化学研究所脳科学総合研究センター）

シュレディンガー方程式

阿部 龍蔵

1. はじめに

ニュートンの力学とマクスウェルの電磁気学とを古典物理学と言う．19 世紀の物理学者や化学者はすべての自然現象は古典物理学で説明できると信じていた．しかし，19 世紀末から 20 世紀の始めにかけて，低温技術の発展，測定方法の進歩などに伴い，古典物理学では説明できないような現象が次々と見つかった．

物質をなるべく低温に保ちたいという夢は人類の最初からあった．この夢を実現すべく冬の氷を貯めておき夏に使うというアイディアが実行された．しかし，19 世紀の後半になると氷を人工的に生産することが可能になった．

古い話で恐縮だが，70 年ほど前，小学校時代に家の近くに製氷工場があった．ある晩，そこの御主人から「工場見学に来ないか」の御招待を受けた．私は父と一緒に徒歩時間 2，3 分の現場に赴いた．70 年前だから，詳しいことは記憶にないが，アンモニアの突き刺すような匂いはよく覚えている．肉，野菜，魚などの運送手段として古くから冷凍装置が必要であった．何しろ現代人は多忙なので食料品の冷凍は必須の事業である．

固体 1 g を融解して同温度の液体とするのに要する熱量をその物質の**融解熱**というが，氷の融解熱は 1 g 当たり 79.7 cal である．すなわち，水の 1 g 当たり 79.7 cal の熱を奪えば水は氷になる．熱を奪うには物体の温度を下げればよい．これには 2 つの方法があり，一つは**寒剤**の利用，もう一つは気体の**断熱膨張**である．

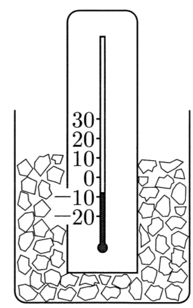


図 1　寒剤の例．

物質の熱を奪うには，その物質から熱を奪えばよい．最も簡単な例は，氷と食塩の混合物で（図 1）著者の経験によると −8℃ になっていることがわかった．理想的には −21℃ になるはずだが，この種の寒剤はアイスクリームの自作に使われる．

寒剤を利用し，氷を作るには，気体の断熱膨張を利用すればよい．液体アンモニアの状態で 8.46 気圧以上の圧力を加えると，アンモニアは液化する．液化する温度は −33.4℃ で私と父とが製氷工場を見学したときアンモニアの強烈な匂いがした

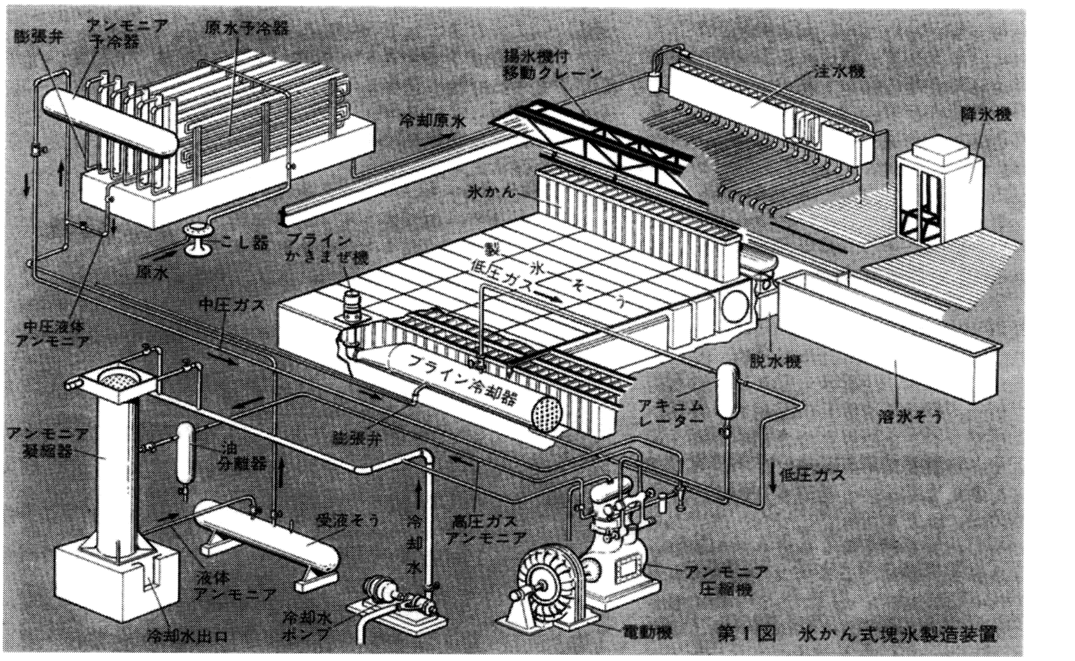


図 2　製氷装置（『世界大百科事典』（1981 年版）第 17 巻（平凡社）より転載）.

のが無理からぬと思っている．図 2 は製氷装置を模式的に示したもので，この図は「世界大百科事典」の一頁からとった．聞き慣れない言葉も出てくるが，全体の流れを理解していただければ幸いである．

このように，低温を実現しようとする人類の奮闘の跡を見ると，そこには，食料品の確保，不快指数からの脱出といった実際的な要求もあったろう．それにもまして重要なことは，自然のままでは体験できない物質の研究ができた点である．

2. 光電効果

紫外線，可視光線，赤外線などの電磁波が金属の表面に当たったとき，その表面から電子が飛び出す現象を**光電効果**という．図 3 は光電効果を模式的に表したものである．

金属の表面に当てる光の振動数やその強さを変えて光電効果を調べると，次のような性質があることがわかる．

(i)　光電効果が起こるためには，金属に当てる光の振動数 ν がその金属に特有な振動数 ν_0 より大きくなければならない．$\nu < \nu_0$ だとどんなに強い光を当てても光電効果が起こらない．逆に，$\nu > \nu_0$ だと，どんなに弱い光でも，光を当てた瞬間に電子が飛び出す．光の波動説では光源を中心にエネルギーが四方八方に広がっていくと考えるが，このような古典物理学の立場では光電効果の説明は不可能である．例えば，北極星からの光が光電効果を起こす時間を波動説で計算すると 10 年以上になってしまうが，実際には瞬間的に光電効果が起こるのである．この性質は，実用的にはカメラの自動露出計とか太陽電池などに利用されている．

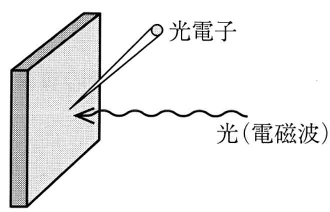


図 3　光電効果の模式図.

(ii)　飛び出した光電子のエネルギー E は，光の強さには無関係で，光の振動数だけで決まる．

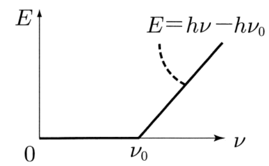


図4　E と ν との関係.

$\nu < \nu_0$ では光電効果は起こらないので $E = 0$ であるが，$\nu > \nu_0$ のとき E と ν との関係は

$$E = h\nu - h\nu_0 \tag{2.1}$$

で与えられる (図 4)．ここで，h は金属の種類によらない，古典物理学と量子物理学との関連を結びつける物理定数で MKS 単位系では

$$h = 6.63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s} \tag{2.2}$$

となる．

(iii)　光の強さを大きくすると，飛び出す光電子の数が増える．しかし，個々のエネルギーは変わらない．

光電子の速度を v とし，電子の質量を m とすれば，

$$m = 9.11 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} \tag{2.3}$$

で E は

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \tag{2.4}$$

と表される．(2.2) で

$$h\nu_0 = W \tag{2.5}$$

とおくと，W は金属の種類によって決まる量となる．W をその金属の**仕事関数**という．例えば，セシウムの仕事関数は 1.38 eV と測定されている．1 eV とは電子が電位差 1 V で加速されたときに得るエネルギーで電気素量 (電子の電荷) が 1.60×10^{-19} C であることを利用すると

$$1\,\mathrm{eV} = 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} \tag{2.6}$$

の関係が成り立つ．セシウムの仕事関数は 1.38 eV $= 2.21 \times 10^{-19}$ J となる．

(2.2) と (2.5) とから

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W \tag{2.7}$$

と書ける．これをアインシュタインの光電方程式という．セシウムに 5000 Å の波長の光を当てたときを考えると，この光の振動数 ν は $\nu = 6.00 \times 10^{14}$ Hz であるから飛び出す光電子のエネルギーは (2.7) により

$$\begin{aligned} E &= 6.63 \times 10^{-34} \times 6.00 \times 10^{14}\,\mathrm{J} \\ &\quad -2.21 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} \\ &= 1.77 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

と計算される．これはセシウムの仕事関数の 1.60 倍である．このように，仕事関数や光電子のエネルギーは eV の単位を使うと 1 の程度となる．

ここで，どんなに弱い光でも瞬間に電子が飛び出すという現象は，光の波動説では説明不可能なことに注意しよう．光の本質に関して，光は波動であるという波動説と，光は粒子であるという粒子説とがあった．19 世紀の初めに行われたヤング (1773～1829) の実験は光が波であることの実験的検証で，光が波動説に軍配が上がったと思われた．弱い光でも瞬間的に光電効果が起こる 1 例として懐中電燈の電球を光源としたものを考える．その場合の電力量は数 W (ワット) 程度であるが，簡単のため電球の電力を 1 W とする．光の波動説によると，光は光源を中心とする球面波として周囲の空間に広がっていく．1 W は 1 J/s であるので，毎秒当たり 1 J のエネルギーが広がっていくことになる．いま，電球から 1 m 離れた所にセシウムを置いたとする．電球を中心とする半径 1 m の球の表面積は $4\pi\,\mathrm{m}^2$ である．この表面上の面積 $S\,\mathrm{m}^2$ の部分を考えると，光のエネルギーは波動説では球対称に広がるから，この部分を通るエネルギーは毎秒当たり

$$\frac{1}{4\pi}S \simeq 8 \times 10^{-2} S\,\mathrm{J/s}$$

となる (図 5)．

セシウムから飛び出す光電子は 1 個の電子から放出されると考えるのが自然であろう．原子の半径は

$$1\,\text{Å} = 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

の程度であるから，上の S はオーダーとして $S \sim$

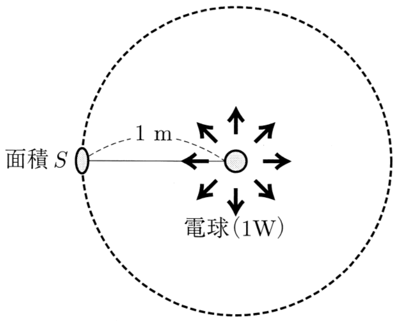


図5　半径1mの球面上にある面積 S の部分.

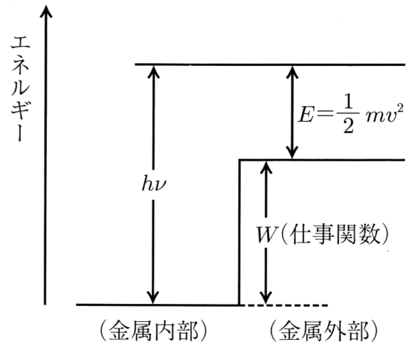


図6　光子説による光電効果の説明.

$(10^{-10})^2 = 10^{-20}$ となる．この S を上式に代入すると，1個の原子が毎秒当たり吸収するエネルギーは 0.8×10^{-21} J/s で与えられる．一方，光電子のエネルギーは前に計算したように 1.8×10^{-19} J である．原子がこれだけのエネルギーを蓄積するための所要時間は

$$\frac{1.8 \times 10^{-19}}{0.8 \times 10^{-21}} \simeq 220\,\mathrm{s}$$

となるが，この値はほぼ4分に等しい．現実には光を当てた瞬間に光電子が飛び出るのであるから，この結果は実験事実と矛盾する．

さらに，光の波動説によると，光の運ぶエネルギーは，その振幅が大きいほど大きい．もし，光が波であれば，どんなに振動数が小さくてもその振幅が大きければ，電子は十分なエネルギーをもらい，金属から飛び出すはずである．したがって，ν_0 というものが存在するはずがなく $\nu_0 = 0$ となるはずである．このように光電効果の現象は光を波動と考えたのでは説明がつかない．

3. アインシュタインの光子説

2節で述べた矛盾を解決するためアインシュタインは，1905年，光は粒子の性質を持ち，ある大きさのエネルギーの塊となって空間を伝わると仮定し，次のような光子説を提唱した．すなわち，光は光子（光量子，フォトン）という一種の粒子の集まりで，1個の光子のもつエネルギー E は，その光の振動数を ν とすれば

$$E = h\nu \tag{3.1}$$

で与えられる．また，光が原子から放出されたり，あるいは原子に吸収されるとき，光は光子として放出，あるいは吸収される．

実際，上の仮定を認めると，例えば(2.7)の関係は次のように理解される．$h\nu$ のエネルギーをもつ1個の光子が金属中の電子と衝突すると，そのエネルギーを全部一度に，その電子に与える．図6に示すように，電子が金属から外へ出るのに必要なエネルギーを W とすれば，エネルギーの保存則により，(2.7)が導かれる．もし，$h\nu$ が W より小さいと電子は外に出られず光電効果は起こらない．前述の(iii)は次のように理解される．光が強いということは，単位時間にぶつかる電子が多いと考えられ，前者に伴って光電子の数も増える．しかし，基本的な関係(2.7)は変わらない．

もし，$h\nu$ が W より小さいと電子は金属の内部から外へ出ることができず光電効果は起こらない．このように，光子説を使うと，光電効果の性質がうまく説明される．なお，上のアインシュタインの考えは，プランクの提唱した**量子仮説**，すなわち“物体が振動数 ν の光を吸収したり放出するとき，やりとりされるエネルギーは常に $h\nu$ の整数倍である”という考えをさらに発展させたものである．

アインシュタインが光子説を提唱した当時，それは一つの学説であった．しかし，現在の進んだエレクロニクスは一つの光子の観測を可能とした．このためには光電子増倍管という装置を利用する．すなわち，1個の光子がやってきたときそれを電

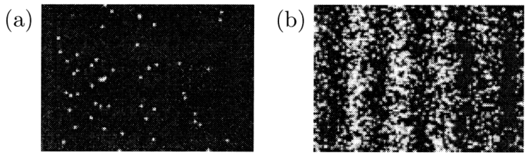


図7　光子を表す映像（土屋裕・杉山優・堀口千代春・犬塚英治・黒野剛弘，テレビジョン学会誌 Vol.36，No.11 (1982) p.1010）.

子に変換し，これをブラウン管上で観測するという仕組みである．原子が光を出す場合，光子は長さ数 m の波速として放出される．このような波速はブラウン管上の一つのスポットとして観測される．こうして，得られる光子の映像を図7に示す．ゲーム機上の映像も似たようなものである．(a) は短時間の露出で干渉縞が見られないが，(b) は長時間の露出で縞模様が観測される．

4. シュレディンガー方程式

波が粒子の性質を示すなら，逆に電子のように古典的には粒子と考えられるものは逆に波の性質をもつのではなかろうか．このような発想をしたのがフランスの物理学者ド・ブロイ（1892〜1987）で，1923年のことであった．実際，後になって，この予想の正しいことが実験的に確かめられた．一般に，物質粒子に伴う波を**ド・ブロイ波**あるいは**物質波**という．ド・ブロイ波の従うべき波動方程式をシュレディンガー方程式という．我々が大学に入学した頃，物質波動論という言葉が流行ったが，やがてそれは量子力学という言葉で統一された．この辺の事情についてはこの節の終りに触れる．一般に，i 番目の質点の位置座標を

$$x_i, y_i, z_i = \boldsymbol{r}_i$$

と書く．i は

$$i = 1, 2, \cdots, N$$

を意味し，N は質点の総数である．i 番目の質点の運動量を $\boldsymbol{p}_i$ とすれば，$\boldsymbol{p}_i$ は

$$\boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{v}_i$$

で与えられる．ただし，i 番目の質点の質量，速度をそれぞれ m_i，$\boldsymbol{v}_i$ と置いた．

ここで，体系の力学的エネルギーに相当する演算子 H を導入し，それを**ハミルトニアン**と呼ぶ．元来，ハミルトニアンという用語は解析力学の分野で導入されたものだが，量子力学でも同様に用いる．両者の違いは，解析力学においてはハミルトニアンは普通の数であるが，量子力学においては，それは演算子である点でどんな演算子が現れるかは次例でわかる．一般に，ハミルトニアンに対して

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \tag{4.1}$$

の方程式を**シュレディンガーの（時間を含んだ）波動方程式**という．これに対して

$$H\psi = E\psi \tag{4.2}$$

の方程式を**シュレディンガーの（時間によらない）波動方程式**という．

(4.1) で t は時間を表す変数だが，$\hbar$（エッチ・バー）は**プランク定数 $\boldsymbol{h}$** を 2π で割ったもので

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054 \times 10^{-34}\ \mathrm{J{\cdot}s} \tag{4.3}$$

と書ける．この $\hbar$ を**ディラック**（1902〜1994）定数という場合もある．(4.1) で ψ は $\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N; t)$, (4.2) の ψ は時間 t を含まず $\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N)$ である．以上の ψ を**波動関数**という．

ψ の物理的意味として次のことが知られている．$\boldsymbol{r}_i$ という状態に注目したとき，質点の位置が点 $\boldsymbol{r}_i$ 近傍の微小体積 ΔV 中に見出される確率は (図 8)，時刻 t において

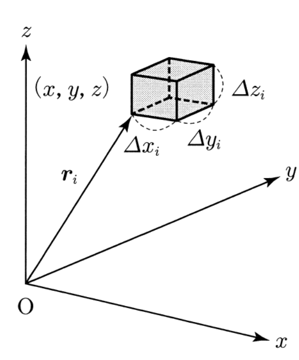


図8　質点の存在確率.

$$|\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N; t)|^2 \Delta V \qquad (4.4)$$

と表される．ただし，| | は複素数の絶対値（大きさ）を意味する記号である．(4.1) と (4.2) との関係は

$$\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N; t) = e^{\frac{E\hbar}{i}t}\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N) \qquad (4.5)$$

である．(4.2) の波動関数は t に依存しない．このため，これを定常状態という．(4.1) の波動関数は (4.5) の関係で結びついており，純虚数は絶対値 1 なので前述の (4.4) はそのまま $\psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N)$ に対しても成り立つ．(4.2) の E は勝手な値をとるわけではない．この式が成り立つとき，E をエネルギー固有値という．普通，シュレディンガー方程式というのは (4.2) を指す．以下，シュレディンガー方程式に関するいくつかの注意事項について述べておく．

(i)　自由粒子：相互作用のポテンシャルが 0 の体系を自由粒子という．この場合，波動関数は

$$\psi = Ae^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)} \qquad (4.6)$$

である（A：任意定数）．運動エネルギーは (2.4) で表されるが，解析力学では $K_i = (1/2m_i)\boldsymbol{p}_i^2$ と表す．また $\boldsymbol{p}_i = \hbar\boldsymbol{k}_i$ を i 番目の粒子の**波数ベクトル**と呼び，全体の運動エネルギー K は

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{\hbar^2 \boldsymbol{k}_i^2}{2m_i} \qquad (4.7)$$

と書ける．

(ii)　全体のハミルトニアンが個々の粒子のハミルトニアンの和として表される場合：全体のハミルトニアン H が

$$H = \sum_{i=1}^{N} H_i(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i) \qquad (4.8)$$

の形であるとする．全系のシュレディンガー方程式で波動関数が

$$\psi = \psi_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{p}_1)\cdots\psi_i(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i) \times \cdots \psi_N(\boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{p}_N) \qquad (4.9)$$

のとき，全系の問題が解ける．(4.9) の形を**変数分離型**という．(4.9) で ψ_i は

$$H_i(\boldsymbol{r}_i, \boldsymbol{p}_i)\psi_i = \varepsilon_i(j_i)\psi_i \qquad (4.10)$$

を満たす．$\varepsilon_i(j_i)$ は質点 i の j_i 番目の固有値である．全系のエネルギー固有値は

$$E = \varepsilon_1(j_1) + \varepsilon_2(j_2) + \cdots + \varepsilon_N(j_N) \qquad (4.11)$$

で与えられる．

(iii)　1 次元調和振動子：ハミルトニアン H が

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2$$

で与えられる場合である．この場合，

$$\psi_n(x) = \frac{1}{(2^n\omega)^{1/2}\pi^{1/4}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} H_n(\xi)e^{-\xi^2}, \qquad (4.12)$$

$$x = \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2}\xi$$

と書ける．1 個の 1 次元調和振動子のエネルギー固有値は

$$\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

で与えられ，(4.12) で $H_n(\xi)$ は n 次のエルミート多項式で，(4.12) の係数は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\psi_n(x)dx = \delta_{mn}$$

となるよう選ばれている．ただし，δ_{mn} のクロネッカーの δ 記号で，$m = n$ なら $\delta_{mn} = 1$，$m \neq n$ なら $\delta_{mn} = 0$ を意味する．

以上の他，シュレディンガー方程式は量子力学と関連する場合が多い．量子力学の勉強をお願いしたい．

（あべ・りゅうぞう，東京大学名誉教授）

リレー連載

人物で学ぶ数学

創始者の思考で学ぶ

第3回

ポール・パンルヴェ

Savant et Homme d'État

大山　陽介

1. はじめに

ポール・パンルヴェ (Paul Painlevé, 1863 年 12 月 5 日生・1933 年 10 月 29 日死去) は，数学者と政治家という 2 つの顔を持ち，そのいずれにおいても大きな仕事を成し遂げたという点で，歴史上稀に見る人物である．数学と政治は，異なる能力を必要とすると一般には考えられる中，数学においては彼の名前を冠した「パンルヴェ方程式」で名を残し，政治家としては，二度フランスの首相を務めることで名を残した．

他の数学者兼政治家としては，日本でも菊池大麓は数学で最初の日本人の教授であり，後に東大総長を経て文部大臣などを務めたことはよく知られている．また，鳩山由紀夫前首相も，東京大学工学部計数工学科を卒業後に主として研究した内容は応用数学に属するであろう．広島市長を務めてきた秋葉忠利氏も，政界に転じる前はトポロジーの研究者であった．パンルヴェの後輩として，エミール・ボレル (ボレル測度やハイネ・ボレルの定理で知られる) も 1925 年に海軍大臣を務めており，数学と政治の両面で活躍した人物である．イギリスでもキャスリーン・オラランショウ (Kathleen Ollerenshaw, 1912 年生) は，魔方陣の研究 (most-perfect pandiagonal magic squares) で知られ，サッチャー首相の教育顧問でもあった．しかしながら，数学と政治の両面でともに大きな業績を残したという点において，パンルヴェを超える人物は史上いないと言って過言ではないだろう．

フランスの街では，政治家や科学者が通りや広場の名前に付けられている．特に言われがあってそうしているわけでなく，後から勝手に付けているので，フランスの様々な街に同じ人の名前の付いた通りがある．パリ 5 区のソルボンヌのすぐ北にあるパンルヴェ広場 (Place Paul Painlevé) は日本のパンルヴェ研究者がパリを訪れたさい必ずといって立ち寄る聖地である．タペストリ「貴婦人と一角獣」を所蔵するクリュニー中世美術館のすぐ南のひっそりとした公園になっている．図 1 はレンヌにあるパンルヴェ通り (Boulevard Paul Painlevé) に



図 1　レンヌのパンルヴェ通り (著者撮影).

ある表示板である.「Savant et Homme d'État」という表現は日本語に訳しにくいが「賢者にして権者」とでもすれば良いであろうか, パンルヴェを表現する良いフランス語だと思う. 他にもナントやボルドーなどフランス各地にパンルヴェ通り (Rue もしくは Boulevard) がたくさんある. また, パンルヴェが23歳で最初に教員となったリール大学の数学教室は「Laboratoire Paul Painlevé」と名付けられている.

2. グスタフ・マーラーとの出会い

パンルヴェがなぜ政界に身を転じるようになったのか, 正確なところは私にはよくわからない. ここでは私的な憶測を述べるにとどめる.

ヒントになるのは, グスタフ・マーラーに関する伝記[3]である. ヴィーン大学の学生時代に自然科学にも興味を持っていたグスタフ・マーラーは, 1905年5月21日にストラスブールのアルザス音楽祭で交響曲第5番 (初演は1904年) を指揮した際にパンルヴェと会っている. 当時のフランスは, ドレフュス事件 (1894年・対独通牒者としてユダヤ人のアルフレッド・ドレフュス大尉が有罪となった冤罪事件) で揺れていた時代であり, ユダヤ人でもあるマーラーは, 強烈なドレフュス擁護派だったパンルヴェらと交友を持っていた. この頃, マーラーはヴィーン宮廷歌劇場とヴィーン・フィルの指揮者を兼任しており, 彼の人生でオペラ指揮者として最も充実していた時代であり, またヴィーン自体のオペラ上演史の黄金時代でもあった (翌1906年には作曲に専念するために指揮者を辞することになる).

ちなみに, ストラスブールで彼等と一緒にいた仲間にポール・クレマンソーがいた. その兄ジョルジュは, 後にパンルヴェの後にフランスの首相になる有名な政治家であり, 弟アルベールはドレフュス事件の弁護を務めた法律家である. パンルヴェが政界に転じるきっかけの一つは, ドレフュス事件にあったろうと推測される. パンルヴェは1906年5月のフランス総選挙で社会主義右派である独立社会派 (socialiste indépendant) から立候補して当選して国会議員になる. この直後, 1906年7月にドレフュスは無罪を勝ち取ることになる.

3. 初めて飛行機に乗った数学者

政界に転じた彼を動かしていたものはもう一つ, 飛行機への興味である. パンルヴェは初めて飛行機に乗った数学者として知られている. この件については2003年のライト兄弟100周年に書いた拙文[13]を参照していただきたい. パンルヴェは流体力学の講義[8]をしていることからも, 学問的興味を持っていたことは確かである. それと同様に, 後に軍事大臣を務めたパンルヴェが軍事的な視点から飛行機に興味を持っていたろうと推察される.

1908年10月10日, パンルヴェはライト兄弟の兄・ウィルバーが操縦する飛行機に同乗し, 1時間10分かけて80キロを飛んだ. これは当時の同乗者飛行としての世界記録である. パンルヴェとウィルバー・ライトの写真は, 2008年11月にストラスブールでパンルヴェ方程式の研究会を行った時にウェッブサイトで紹介してあるので, ここでは同年10月28日にパンルヴェがフランス人の飛行機乗りだったアンリ・ファーマンと40キロ飛んだときの写真を掲げる (図2). いずれの写真も, パンルヴェの死後に息子のジャン・パンルヴェ (科学映画制作で有名) によって編集された写真集[14]に掲載されていたものである.

4. 微分方程式の萌芽期

パンルヴェが研究者としてスタートを切った1880年代は, 微分方程式の研究が個別の方程式

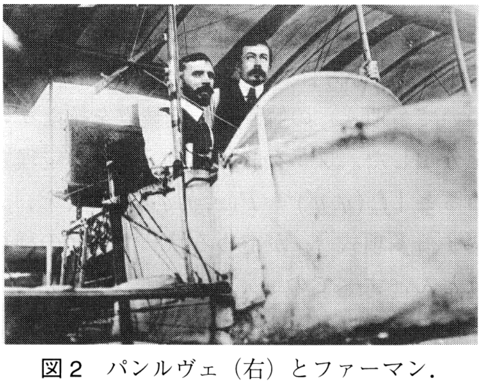


図2　パンルヴェ (右) とファーマン.

の研究から一般論へと進み始めた時期である．それ以前にも，微分方程式の一般的な研究がなかったわけではない．例えば，1853年にJ. ペッツヴァルが線型方程式を中心にした本[9]を書いている．この本はラプラス変換を初めて組織的に扱った文献として歴史的にも重要である（が，当時は注目されなかった）．少し遅れて1859年にG. ブール（ブール代数で知られる）が出版した本[1]は，その後広く読まれることになった（今も新刊が購入できる）．後のヘビサイドらの演算子法の基本的な部分は，すでにこの本で書かれている．

1880年に，フランス科学アカデミーは「微分方程式の理論で重要な進展に対して（“pour des avancées significatives sur certains aspects de la théorie des équations différentielles”）」コンテストを行った．このコンテストに敢然と挑んだ26歳の若者がポアンカレである．1879年に学位を取ったばかりのポアンカレは，2階線型常微分方程式の解の比を考え，上半平面上の保型函数論へと進んでいった．このコンテストでグランプリを得たのは微分方程式の不変式論を研究したG.H. アルファン（George-Henri Halphen）で，ポアンカレがグランプリの2位になっている[4]．

アルファンは，不変式論以外にもテータ零値の満たす非線型方程式にも名前を残しており，また，楕円函数に関する巨大な三巻本などでも知られている．ボルドー大のA. サバー教授に聞いた話によると，フランスにはアルファンの名前のついた通りが一本もないそうで，「アルファン通り」を作るのがサバー氏の夢だそうである（できることがあるのなら，私も協力したい）．

この後，L. フックスとポアンカレが1884年に1階有理型微分方程式 $F(x,y,y')=0$（F は y,y' について多項式）の解が動く分岐点を持たない場合を分類した．フックス・ポアンカレの定理をまとめると「$f_x(y,y')=F(x,y,y')$ とおくと，y,y' に関する多項式 f_x が定めるリーマン面の種数 g はほとんどすべての x について一定であり，(1) $g=0$ のときはリッカチ方程式　(2) $g=1$ のときは楕円函数　(3) $g>1$ の場合はすべて初等函数で解ける例外的な場合に限る」ことになる．

ここで，今日**パンルヴェ性**と呼ばれる「解が動く分岐点を持たない」という言葉の意味について説明しておこう．簡単な例として，微分方程式 $y'=y^n$ を考えると，その解は C を定数として

$$y=(n-1)(C-x)^{1/(1-n)} \quad (n\neq 1)$$

になる．$n=1$ の場合は $y=Ce^x$ が解になる．元の微分方程式にはどこにも分岐点がないが，一般解は積分定数に依存する分岐点 $x=C$ を持つ．例外は，$1/(1-n)$ が整数の場合である．今は有理型の微分方程式なので n も整数とすると，$n=0,1,2$ の場合にのみ解は動く分岐点を持たず，それ以外の場合は動く分岐点を持つ．$n=0,1$ の場合は線型であり，$n=2$ の場合はリッカチ方程式の特殊な場合である．

ナイーブに考えれば，以上のように微分方程式の解が含む任意定数に依存する分岐点の有無で判断すればよい．しかし，解が既知の函数では表示されない場合には「解が含む任意定数」の意味すら定かではない．実際，パンルヴェ方程式の一般解は既知の函数にならない（パンルヴェ方程式の既約性もしくは還元不能性）ので，上の例で説明した程度の話ではすまないのである．また，既知函数で表示される場合でも

$$y''=-y^3y'+yy'\sqrt{4y'+y^4}$$

の一般解は $y=A\tan(A^3x+B)$ となり，動く分岐点を持たないが，特異解 $y=\sqrt[3]{4/(3(x-c))}$ は動く分岐点を持つ（Ince[5] p.355）．この例のように，正規型でない方程式（右辺が代数函数）の場合には特異解が表れるために解の考察が複雑になる．パンルヴェ性を完全に調べ上げるには，解の局所的な級数展開を求め，初期値空間を構成することが必要になり，正規型でない場合や高階の方程式では極めて難しい．

さて，フックス・ポアンカレの定理に戻ろう．この定理には一つの瑕瑾があった．彼等は動く分岐点を持たない方程式を考察して一価性の条件を調べたが，動く真性特異点を持つかどうかは調べて

いなかった．パンルヴェは1887年の彼の学位論文において，1階有理型微分方程式 $F(x,y,y')=0$ の解は動く真性特異点を持たないことを示し，フックス・ポアンカレの定理の穴を埋めた．

なお，数学者アンリ・ポアンカレの従弟レイモン・ポアンカレも政治家であり，1913年から1920年までフランス第三共和政の第九代大統領を務めた．この間，1917年9月12日から1917年11月16日の短期間であるが，パンルヴェは首相（第1次内閣，第2次は1925年）になっている．図1で紹介したレンヌのパンルヴェ通りの東端はレイモン・ポアンカレ通りと交わっている．また，アンリ・ポアンカレの妹アリーヌと哲学者エミール・ブートルーの間の生まれたピエール・ブートルーはパンルヴェの弟子であり，パンルヴェ方程式の漸近解の研究を行った．

5. 動く分岐点を持たない方程式

「動く特異点を持たない微分方程式」というのは，あまりこなれた日本語ではない．英語で "differential equations without movable singular points" と表記しても，しっくりしない．フランス語であれば，肯定的に "les équations différentielles à points critiques fixes" と書けてわかりやすいが，日本語に直訳できないのである．

動く分岐点を持たない方程式が重視されるようになった理由は，私にははっきりしない．おそらく初めてこの問題を考えたのは，1856年のブリオ・ブーケ[2]あたりだろうと思われる．「加法定理 $f(u+v)=R(f(u),f(v))$ を満たす函数 $f(u)$ は何か」という問題を考える．加法公式を v で微分して $v=0$ とおけば $F(f(u),f'(u))=0$ という自励系方程式を得る．加法公式が成り立つ以上，分岐点はないはずである．ブリオ・ブーケは，1階自励系の場合に，動く分岐点を持たない方程式を分類することで，加法公式を持つ函数は，指数函数，楕円函数，有理函数に限ることを示した．

ブリオ・ブーケは，さらに1階有理型の方程式すなわち

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

（$P(x,y),Q(x,y)$ は多項式）の形の方程式についても研究している．

この後，解が分岐点を持たないことを本質的に用いたのが，1889年のコワレフスカワの研究である．**コワレフスカワのコマ**と呼ばれる，可積分な剛体の運動に関するこの論文[6]の序盤（p.183）のところで，パンルヴェ性から剛体の主慣性モーメントの比が2:2:1になることを導くところは，局所解をローラン展開して係数を決めていく現代のパンルヴェ・テストの手法そのものである．論文の後半では，方程式の解が超楕円函数で記述されることを示している．

フックス・ポアンカレの定理とパンルヴェの定理で1階の動く特異点を持たない方程式は明快に理解できるようになった．次は2階というのが自然な目標である．この問題に最初に取り組んだのはE. ピカールである．ピカールは1889年のフランス数学会グランプリ論文[10]で，代数曲面の上の積分を考えた．完全楕円積分のような，代数多様体の周期は彼の名前を冠したピカール・フックス方程式の解になるが，不完全楕円積分もある非線型方程式を満たし，その構成から動く分岐点を持たないことがわかる．これが今で言う第6パンルヴェ方程式のピカール解であり，（私が文献で知ってる限り）歴史上最初に発見されたパンルヴェ方程式である．1889年は，コワレフスカワのコマとピカール解の2つが発見された，パンルヴェ性について記念すべき年と言ってよい．

その後，ピカールは動く分岐点を持たない2階自励系方程式 $F(y,y',y'')=0$ の考察をした．動く分岐点の考察として，自励系の場合は考えやすいと思ったのであろうし，1階の場合のブリオ・ブーケの先行研究から考えても自然である．しかし，1893年には分類を諦めているようである．この論文[11]では，2階の場合には動く真性分岐点をもつ自励系方程式の例

$$\left[(y')^2-yy''\right]^2+4y\,(y')^3=0$$

をあげて，2 階の場合の困難さの例としている．この方程式の一般解は $y = C\exp(1/(x-D))$ である．

6. パンルヴェ方程式

ピカールの後を受けて，動く分岐点を持たない 2 階非線型方程式の分類に取り組んだのがパンルヴェである．彼のストックホルム講義録[7]の終わりのほうにも，ピカール解について精査に考察してる．

パンルヴェが分類に成功したのは，彼がピカールと異なって 2 階正規型方程式 $y'' = F(x,y,y')$ に限ったこと，そして何よりも，彼が用いた α-method と呼ばれる方法が分類において強力だった点である．前者は前節で述べたような特異解を排除するのに必要である．ここで，右辺の函数 F は，x に関して解析的，y について代数的，そして y' について有理的とする．

ここで，α-method について説明しよう．パラメータ α を含んだ微分方程式 $y''= F(x,y,y',\alpha)$ を考える．F は $\alpha = 0$ を含んだ領域で α について解析的とする．このとき，方程式の一般解が $\alpha \neq 0$ で一価であれば，$\alpha = 0$ でも一価である，というのが α-method である．細かいことではあるが，α-method はあくまで一価性を問題にしているので真性特異点の問題は考えてない．私見であるが，動く分岐点を持たない 2 階正規型方程式は動く真性特異点も持たないと予想している．なお，動く分岐点かつ真性特異点を持つ方程式として

$$y'' = \frac{2y-1}{y^2+1}\,(y')^2$$

がある．一般解は $y = \tan(A + \log(x-B))$ であり，$x = B$ が分岐を持つ真性特異点になる．

α-method によって，パラメータによる退化を考えてより簡単な方程式に落として分岐点を持つかどうか調べることで，解が分岐点を持たないための必要条件を与える．例えば，次の事実がわかる：

定理　y, y' について有理的な 2 階正規型方程式が動く分岐点を持たないとき，次の形に限る

$$y'' = L(x,y)\,(y')^2 + M(x,y)y' + N(x,y).$$

ここで，$L(x,y), M(x,y), N(x,y)$ は y について有理式．

証明は例えば，Ince[5] p.321 を見て欲しい．以下，α-method を繰り返して $L(x,y), M(x,y), N(x,y)$ などの条件を決めていき，方程式を分類していくのである．岡本和夫の著書[12]18 ページの命題 1.8 には，α-method を用いて $y'' = 6y^2 + F(x)$ の形の方程式が動く分岐点を持たないならば，$F(x)$ は 1 次式に限ることを示してある．

1898 年，パンルヴェは動く分岐点を持たない有理的な 2 階正規型方程式を 25 通りに分類し，その中で既知の函数で解けないものを 3 つ見出した (第 1，第 2，第 3 パンルヴェ方程式)．その中で，第 1 第 2 方程式は，一つの方程式に統一的に書けること，第 3 方程式は今で言う $D_6^{(1)}, D_7^{(1)}, D_8^{(1)}$ 型の 3 通りに分けられることもすでに述べている．パンルヴェ本人が最初に見つけた 3 つの方程式を掲げよう：

$$\begin{aligned}
y'' &= 6y^2 + t,\\
y'' &= 2y^3 + ty + \alpha,\\
y'' &= \frac{1}{y}y'^2 - \frac{y'}{t} + \frac{\alpha y^2 + \beta}{t} + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}.
\end{aligned}$$

1905 年，モノドロミ保存変形の立場から L. フックスの息子 R. フックスが第 6 パンルヴェ方程式を発見した．この方程式はピカール解を特別な場合として含むため，パンルヴェの分類に見落としがあると思われ，弟子の R. ガンビエが分類を修正して，残り 3 つを発見した．パンルヴェ方程式発見の段階で，その後研究する際の鍵になる「動く分岐点を持たない方程式」，「モノドロミ保存変形」の 2 つがすでに交錯していたのである．

初めて 6 種類のパンルヴェ方程式がリストされたのは，彼が政治家になった後の 1907 年のパンルヴェ自身の論文においてである．この論文には，後の第 6 方程式のマニンの楕円函数表示につながる式が書かれるなど，興味深いものになっている．1909 年のガンビエの論文には動く分岐点を持たな

い有理的な2階正規型方程式が50種類リストされ，既知の函数で解けないものが6つ残ることを示している．また，y について代数的な場合が，さらに3つあることも示した（Ince[5] p.353）．

この後，パンルヴェ方程式の研究は，彼の弟子たちであるガルニエやブートルーらが担うが，ブートルーは第一次大戦直後に若くしてなくなり，1970年代のイジング模型の研究による大発展まで，ガルニエのみが細々と西欧で研究を続けることになる（実は，1950年代にH. SchubartやH. Wittichの研究，1960年代にJ.M. Myersの研究があったがほとんど知られてない）．

7. 高階方程式へ

動く分岐点を持たない方程式の分類は気が遠くなる作業であり，後にF.J. Bureauが長大な論文を書いて検証している．また，高階パンルヴェ方程式の分類もパンルヴェ本人やガルニエらがすぐに取り組んだが，シャジーの仕事を最後に中断した．ガルニエ系も，3階パンルヴェ方程式の研究が動機であった．近年，C.M. Cosgroveらが古典的な方法で再開しているが，3階パンルヴェ方程式は，おそらく2階のパンルヴェ方程式をリッカチ拡大したものになるだろうと思われる．

4階方程式については，1998年頃に野海・山田系と呼ばれるA型のアフィン・ワイル群を変換群にもつ方程式の系列が発見されたのをきっかけに，2005年頃に笹野祐輔氏によって $D_6^{(1)}$ 型のアフィン・ワイル群を持つ方程式が発見されるなど，多くの方程式が構成されるようになった．現在，モノドロミ保存変形の立場から4階パンルヴェ方程式の分類が今まさに進行中である．2，3年前まで，高階パンルヴェ方程式の分類はリストが大きすぎて不可能と思われていたが，ドリーニュ・シンプソン問題などrigid系周辺の研究が進んだことで，高階パンルヴェ方程式の分類問題もモノドロミ保存変形の立場から新たな展開を迎えようとしている．大島利雄氏によって，アクセサリ・パラメタを4つ含むフックス型常微分方程式のリストが作られ，その合流操作を含む線型方程式のモノドロミ保存変形として，4階パンルヴェ方程式の分類が坂井秀隆氏らによって完成しつつある．

パンルヴェ方程式の研究は，当初は孤立したかのように見えたが，現在はこうして他分野との交流が進んだことで，相互作用によって研究が活発になっている．パンルヴェが飛行機に興味を持って，研究者としても政治家としても幅を広げたように，新しい話題を外から取り込んでいくことが今後も必要であろう．

参考文献

1) George Boole, "Treatise on Differential Equations" Cambridge (1859).
2) Charles Auguste Briot and Claude Bouquet, "Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles", *J. l'Ecole Poly.*, **36e** Cahier, Tome **21** (1856), 133–198.
3) Henry-Louis De La Grange, "Gustav Mahler", Vol.3: Vienna: Triumph and Disillusion, 1904–1907, Oxford University Press (2000). 199ページ.
4) ジェレミー・J. グレイ，訳・関口次郎，『リーマンからポアンカレにいたる線型微分方程式と群論』シュプリンガー・ジャパン (2002)：3.6節「高階の方程式」，6.2節「ポアンカレ」.
5) E.L. Ince, "Ordinary Differential Equations", Longmans-Green, London (1926).
6) Sophie Kowalevski, "Sur le probleme de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe", *Acta Math.* **12** (1889), 177–232.
7) P. Painlevé, "Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles", Hermann, 1897. Painlevé全集1巻にも収録.
8) Paul Painlevé "Leçons sur la rśistance des fluides non visqueux", Gauthier-Villars (1930).
9) Joseph Petzval, "Integration der linearen differentialgleichungen mit constanten und veränderlichen coefficienten", Akademie der Wissenschaften in Wien, (1853).
10) Emile Picard, Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables, *J. Math. Pures et Appl. Série 4*, **5** (1889) 135–320.
11) E. Picard, Remarques sur les équations différentielles, *Acta Math.*, **17** (1893), 297–300.
12) 岡本和夫『パンルヴェ方程式』岩波書店 (2009).
13) 大山陽介「初めて空を飛んだ数学者　ポール・パンルヴェ」数学セミナー，2003年12月号 54–58.
14) Jean Painlevé 編・写真集 "PAUL PAINLEVÉ 1863–1933" (Paris, 1935).

（おおやま・ようすけ，大阪大学大学院情報科学研究科）

特　集（2011年5月号予告）

初学者を悩ます数理の概念

理解のためのヒントを探る

対談：初学者を悩ます数理の概念	河東泰之・鈴木香織
言語としての数学	新井　紀子
微積分	坂井　秀隆
線型空間，線型写像と表現行列	岡田　聡一
ベクトル解析	森田　茂之
微分方程式	山崎　満
集合	松尾　厚
代数学	松本　久義
ルベーグ積分は難しいか？	植田　好道

本体952円

特　集（2011年3月号）

方程式と現代代数学

代数で語る方程式の面白さ

方程式をめぐる代数の世界	桂　利行
行列と1次方程式	木村　俊一
代数方程式 代数学の基本定理とは何か	清水　勇二
解ける代数方程式	小林　正典
体と代数方程式 ガロア理論とは何か	三宅　克哉
5次方程式と微分方程式	落合　啓之
行列と微分方程式	加藤　晃史
数論と方程式	伊吹山知義
［コラム］代数学的な方程式と解析学的方程式の違い	梅村　浩
《名著に親しむ》代数系とその関連分野を学ぶために	森脇　淳
［インタビュー］数学は面白い！	桂　利行
《現象から方程式を創り出す》第14回	高木　泉
《人物で学ぶ物理》第1回	米谷　民明
《人物で学ぶ数学》第2回	田中　一之

本体952円

編集後記

今回の特集はいかがでしたでしょうか．取り上げられているテーマを見るだけでも物理学と多様体の関係の強さがよくわかります．それと同時に物理学を多様体を通じて見てみると新鮮な理解ができるなと感じます．

ところで，先日，作曲家のチャイコフスキー自身の人生を題材にしたバレエを観に行きました．これはチャイコフスキーの作品（バレエ曲ではなく交響曲や管弦楽曲）にあわせてバレエを踊る，といった趣向のもので，この企画を立てたバレエ団の監督はなかなか面白いことをするな，と思いました．

チャイコフスキーについては漠然とこんな人物であった，というのは本などで知っていましたが，あらためてバレエを通じて音楽を聴くと，それまで頭で理解していたものとは違った，新鮮な理解ができたような気がしました．多様体を通じて見る物理学に近いのかな，とも感じます．

こうした新鮮な理解に何度も巡り会いたいものです．　(R)

数　理　科　学　4月号

2011年4月1日発行

数理科学編集部　　　　発行人　木下敏孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　© 株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

本誌の内容を無断で複写複製・転載することは，著作者および出版者の権利を侵害することがありますので，その場合にはあらかじめサイエンス社著作権担当者あて許諾をお求め下さい．

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁